Projeto de Pesquisa

IDEAL-VALUED INDEX AND FIXED POINT PROPERTY OF FLAG MANIFOLDS

Área de conhecimento: Geometria e Topologia.
Linha de pesquisa: Topologia Algébrica.
Coordenadora: Thaís Fernanda Mendes Monis (Departamento de Matemática - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP).
Projeto em conjunto com: Peter Wong (Department of Mathematics, Bates College, Lewiston, ME 04240, U.S.A.).

1. Introdução

Dado um espaço topológico X, diz-se que esse possui a propriedade do ponto fixo (abreviadamente, p.p.f.) quando para todo função contínua $f : X \to X$ existe x em X com $f(x) = x$. O primeiro exemplo de espaço dessa natureza é o intervalo fechado $[0, 1]$, cuja p.p.f. é garantida através do *Teorema do valor intermediário* de B. Bolzano, de 1817. Em 1909, L.E.J. Brouwer demonstrou a versão análoga para dimensões maiores, isto é, para toda função contínua $f : D^n \to D^n$ do disco fechado de dimensão n sobre si mesmo existe x em D^n com $f(x) = x$. Posteriormente, S. Lefschetz deu sua contribuição no desenvolvimento da Topologia Algébrica quando provou seu celebrado teorema de ponto fixo (1921), uma generalização de longo alcance do Teorema de Brouwer. Pouco tempo depois, 1927, J. Nielsen desenvolve uma teoria de ponto fixo um tanto mais sutil (hoje conhecida como teoria de ponto fixo de Nielsen) e K. Borsuk responde a uma questão colocada por S. Ulam, culminando no famoso Teorema de Borsuk-Ulam de 1931. Essas teorias clássicas estão relacionadas entre si e possuem numerosas aplicações tais como existência de múltiplas soluções em equações diferenciais, existência de um número infinito de pontos críticos de funcionais, soluções para problemas de equipartição na geometria combinatória, etc. E novas relações com outros ramos da Matemática continuam lançando luzes sobre esses temas clássicos.

Saber se um dado espaço topológico X possui a p.p.f. é uma questão fundamental em topologia. No entanto, a p.p.f. não é uma propriedade bem comportada. Por exemplo, se X e Y são variedades compactas, cada uma com a p.p.f., sabe-se (ver, por exemplo, [22]) que $X \times Y$ não precisa possuir a p.p.f. (para uma descrição da teoria de ponto fixo topológica até 1970, ver [9]).

Nesse projeto de pesquisa, estudamos a propriedade do ponto fixo para a seguinte classe de espaços topológicos: as variedades bandeira generalizadas. São espaços da forma:

$$\mathbb{F}M(n_1, \ldots, n_k) = \frac{U_{\mathbb{F}}(n)}{U_{\mathbb{F}}(n_1) \times \cdots \times U_{\mathbb{F}}(n_k)},$$

$n_1 + \cdots + n_k = n$. Aqui, $\mathbb{F}$ denota $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathcal{H}$, e

$$U_{\mathbb{F}}(n) = \begin{cases} O(n) \text{ o grupo ortogonal de ordem } n \text{ se } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ U(n) \text{ o grupo unitário de ordem } n \text{ se } \mathbb{F} = \mathbb{C}, \\ Sp(n) \text{ o grupo simplético de ordem } n \text{ se } \mathbb{F} = \mathcal{H}. \end{cases}$$

Essa família de espaços topológicos é uma generalização natural da família dos espaços projetivos. Com respeito à p.p.f. para os espaços projetivos, a partir de ferramentas da topologia algébrica, é conhecido que os espaços projetivos de dimensão par (sobre os reais $\mathbb{R}$, os complexos $\mathbb{C}$ ou os quatérnios $\mathbb{H}$) possuem todos a propriedade do ponto fixo. Na verdade, a prova é uma aplicação do Teorema de ponto fixo de Lefschetz: mostra-se que o número de Lefschetz $L(f)$ de qualquer auto-aplicação f sobre tais espaços é um número diferente de zero e, assim, a conclusão é de que f tem ponto fixo. A técnica do uso do número de Lefschetz é essencialmente a única ferramenta da topologia algébrica usada para estabelecer a p.p.f. quando os objetos são variedades compactas.

Em [15], Glover e Homer obtiveram condições necessárias a fim de que $\mathbb{F}M(n_1, \ldots, n_k)$ tenha a propriedade do ponto fixo. São elas:

Teorema 1 ([15], Theorem 1). *Se $\mathbb{F}M(n_1, \ldots, n_k)$ possui a propriedade do ponto fixo então $n_1, \ldots, n_k$ são todos distintos. Além disso, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, no máximo um deles é ímpar.*

O resultado de Glover e Homer dá origem a seguinte conjectura:

Conjectura:

- **a):** Se $n_1, \ldots, n_k$ são todos distintos então $\mathcal{H}M(n_1, \ldots, n_k)$ possui a propriedade do ponto fixo.
- **b):** Quando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, se $n_1, \ldots, n_k$ são todos distintos e no máximo um deles é ímpar então $\mathbb{F}M(n_1, \ldots, n_k)$ possui a propriedade do ponto fixo.

Abaixo, listamos os casos já resolvidos na literatura.

(1) Espaços projetivos: $\mathbb{F}P^n = \mathbb{F}M(1, n)$ (aplicação clássica do teorema de Lefschetz).

(2) Se n_2 e n_3 são números pares, positivos, distintos e $n_3 \geq 2n_2^2 - 1$ então $\mathbb{C}(1, n_2, n_3)$ possui a p.p.f. ([15]).

(3) Se $1, n_2$ e n_3 são inteiros positivos distintos e $n_3 \geq 2n_2^2 - 1$ então $\mathcal{H}(1, n_2, n_3)$ possui a p.p.f. ([15]).

(4) Se $n_2 < n_3$ são inteiros pares maiores do que 1 e $n_2 \leq 6$ ou $n_3 \geq n_2^2 - 2n_2 - 2$, então $\mathbb{R}M(1, n_2, n_3)$ possui a p.p.f. ([15]).

(5) Se n_1, n_2, n_3 são inteiros positivos tais que no máximo um deles é ímpar e, além disso, $n_1 \leq 3$, $n_3 \geq n_2^2 - 1$ e $[n_1/2] < [n_2/2] < [n_3/2]$, então $\mathbb{R}M(n_1, n_2, n_3)$ possui a p.p.f. ([15]).

(6) Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou $\mathcal{H}$ então $\mathbb{F}M(2,q)$ possui a p.p.f. para todo $q > 2$ ([31]).

(7) $\mathbb{R}(2,q)$ possui a p.p.f. para todo $q = 4k$ e $q = 4k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ ([31]).

(8) Para $p \leq 3$ e $q > p$ ou $p > 3$ e $q \geq 2p^2 - p - 1$, $\mathbb{C}M(p,q)$ possui a p.p.f. se, e somente se, pq é par ([13]).

(9) Para $p \leq 3$ e $q > p$ ou $p > 3$ e $q \geq 2p^2 - p - 1$, $\mathcal{H}M(p,q)$ sempre possui a p.p.f. ([13]).

A técnica básica usada na demonstração dos resultados listados acima é o cálculo do número de Lefschetz de uma auto-aplicação de um tal espaço. Veja que quando nos focamos no caso $\mathbb{F}(p,q)$ estamos nos especializando no estudo da p.p.f para as variedades grassmannianas uma vez que $\mathbb{F}(p,q)$ é identificado com a grassmanniana

$$G_{\mathbb{F}}(p,q) = \{V \mid V \text{ é subespaço vetorial de } \mathbb{F}^{p+q} \text{ de } \dim_{\mathbb{F}} V = p\}.$$

O estudo das variedades de Grassmann possui longa história. A topologia das variedades de Grassmann é bem entendida. No entanto, é interessante notar que a classificação dos espaços dessa classe que possuem a p.p.f. ainda não está totalmente estabelecida. No caso específico das grassmannianas complexas, temos o seguinte.

Denotemos a variedade grassmanniana complexa $G_{\mathbb{C}}(k,n)$ simplesmente por $G(k,n)$. Seja γ^k o k-fibrado vetorial canônico sobre $G(k,n)$, definido por

$$\{(V,x) \in G(k,n) \times \mathbb{C}^{n+k} \mid x \in V\} \to G(k,n)$$

$$(V,x) \mapsto V.$$

Se

$$ch(\gamma^k) = 1 + c_1 + \ldots + c_k, \; c_i \in H^{2i}(G(k,n); \mathbb{Q})$$

denota a classe total de Chern de γ^k então, de [5] e [19], sabemos que a cohomologia de $G(k,n)$ é dada por

$$H^*(G(k,n); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[c_1, \ldots, c_k]/I_{k,n},$$

onde $I_{k,n}$ é o ideal gerado pelos elementos $(c^{-1})_{n+1}, \ldots, (c^{-1})_{n+k}$. A notação $(c^{-1})_j$ refere-se a parte da soma formal do inverso de c em dimensão $2j$. Assim, c_1 é o único gerador em dimensão 2. Consequentemente, dada uma função contínua $f : G(k,n) \to G(k,n)$, $f^*(c_1) = mc_1$ para algum coeficiente m. De [31] e [13], temos o seguinte.

Teorema 2 ([31], [13])**.** *Sejam $k \leq 3$ e $n > k$ ou $k > 3$ e $n \geq 2k^2 - k - 1$. Então, todo endomorfismo de anel graduado de $H^*(G(k,n); \mathbb{Q})$ é um endomorfismo de Adams.*

Consequentemente, com essas hipótese sobre k e n, se $f : G(k, n) \to G(k, n)$ é uma função contínua com $f^*(c_1) = mc_1$ então $f^*(c_i) = m^i c_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Recordamos que um endomorfismo φ de $H^*(G(k, n); \mathbb{Q})$ é chamado endomorfismo de Adams quando existe um coeficiente λ tal que $\varphi(x) = \lambda^i x$ para todo $x \in H^{2i}(G(k, n); \mathbb{Q})$, $i = 1, 2, \ldots$. O coeficiente λ é chamado de **grau do endomorfismo** φ.

Quando a ferramenta usada para o estudo da p.p.f. do espaço X é o número de Lefschetz, é de fundamental importância conhecermos sua cohomologia e os endomorfismos de anel graduado de $H^*(X)$. No caso das grassmannianas complexas, apesar de termos uma total descrição de sua cohomologia, a classificação dos endomorfismos de anel graduado de $H^*(G(k, n); \mathbb{Q})$ está ainda parcialmente estabelecida na literatura. Além do Teorema 2, sabe-se o seguinte.

Teorema 3 ([19], Theorem 1.1)**.** *Seja $k < n$ e h um endomorfismo de anel graduado de $H^*(G(k, n); \mathbb{Q})$ com $h(c_1) = mc_1$, $m \neq 0$. Então h é um endomorfismo de Adams.*

Se $k < n$ e h é um endomorfismo de anel graduado de $H^*(G(k, n); \mathbb{Q})$ com $h(c_1) = 0$, ainda não se conhece uma descrição de h. A conjectura é que, nesse caso, h deve satisfazer $h(c_i) = 0$, $i = 2, \ldots, k$. Se alguém for capaz de provar tal conjectura, o problema de determinar a propriedade do ponto fixo para as grassmannianas complexas fica totalmente resolvido, visto que:

Proposição 1. *Um endomorfismo de Adams de $H^*(G(k, n); \mathbb{Q})$ possui número de Lefschetz igual a zero se, e somente se, seu grau é -1 e kn é ímpar.*

Segundo [9], a propriedade do ponto fixo de espaços homogêneos é equivalente a um problema do tipo Borsuk-Ulam, como segue. Seja G um grupo de Lie conexo e compacto e K um subgrupo fechado de G. Denote por G/K o espaço das classes laterais à esquerda $\{gK\}$. O subgrupo K age livremente sobre G via $k \cdot g = gk^{-1}$ e K age sobre $M = G/K$ via $k * (gK) = kgK$. Para toda auto-aplicação $f : M \to M$, a função contínua associada $\varphi_f : G \to M$ dada por $\varphi_f(g) = g^{-1} f(gK)$ é uma função K-equivariante com respeito às K-ações sobre G e sobre M descritas acima. Analogamente, toda K-função $\varphi : G \to M$ gera uma auto-aplicação $f_\varphi : M \to M$ definida por $f_\varphi(gK) = g\varphi(g)$. Além disso, $f(gK) = gK$ se, e somente se, $\varphi_f(gK) = eK$, onde $e \in G$ é o elemento identidade. Assim, M possui a propriedade do ponto fixo se, e somente se, $\varphi^{-1}(\{eK\}) \neq \emptyset$ para toda K-aplicação $\varphi : G \to M$.

Recordemos que o Teorema de Borsuk-Ulam clássico afirma que para toda função contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ da esfera de dimensão n no espaço euclidiano de dimensão n, existe um ponto $z \in S^n$ tal que $f(z) = f(-z)$, onde $-z$ é o ponto antipodal a z. Esse resultado é equivalente à não existência de uma função $\mathbb{Z}_2$-equivariante $\varphi : S^n \to \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Desde então, muitos problemas do tipo Borsuk-Ulam são provados através do estabelecimento de não existência de funções G-equivariantes. Na década de 1950, C. Yang usou teoria de índice cohomológico numérico para estabelecer resultados de não existência de aplicações equivariantes. Posteriormente, Connor-Floyd, Krasnoseski, Fadell-Husseini generalizaram tal teoria de índice com aplicações em teoria de pontos críticos e em análise não linear. Em 1988, Fadell e Husseini [12] introduziram um *ideal-valued index* $\mathrm{Ind}^G X$ para um G-espaço X, o qual se encontra no anel de cohomologia $H^*(BG)$ do espaço classificante BG de G. Em particular, eles mostraram que se existe uma G-aplicação $\varphi : X \to Y$ entre dois G-espaços então $\mathrm{Ind}^G Y \subseteq \mathrm{Ind}^G X$. Essa teoria tem se mostrado bastante útil em resultados recentes com respeito à problemas do tipo Borsuk-Ulam.

Assim, traduzido o problema da propriedade do ponto fixo de um espaço homogêneo G/K para um problema de não existência de aplicação equivariante, a proposta desse projeto de pesquisa é a de investigar a questão do ponto fixo para as variedades bandeira a partir dessa perspectiva. A ferramenta para tal será a teoria de índice de valor ideal de Fadell e Husseini.

Embora a teoria de *ideal-valued index* seja uma ferramenta poderosa, o cálculo do *ideal-valued index* de um G-espaço X é difícil e foi calculado apenas para algumas classes de espaços (ver, por exemplo [3, 23, 25]).

Referências

[1] Hans J. Baues, *Obstruction theory on homotopy classification of maps*, Lecture Notes in Mathematics, **628**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[2] Blagojević, Pavle V. M.; Dimitrijević Blagojević, Aleksandra; McCleary, John., *Spectral sequences in combinatorial geometry: cheeses, inscribed sets, and Borsuk-Ulam type theorems*. Topology Appl. **158** (2011), no. 15, 1920–1936.

[3] Blagojević, Pavle V. M.; Zieger, Gnter M., *The ideal-valued index for a dihedral group action, and mass partition by two hyperplanes*. Topology Appl. **158** (2011), no. 12, 1326–1351.

[4] Carlos Biasi, Alice K. M. Libardi and Thaís F. M. Monis, *The Lefschetz coincidence class of p-maps*, Forum Math. **27** (2015), no. 3, 1717–1728.

[5] Borel, A., *Sur la chorologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*. Ann. of Math. (2) **57** (1953), 115–207.

[6] R. Dobreńko, *The obstruction to the deformation of a map out of a subspace*, Dessertationes Math. (Rozprawy Mat.), vol. 295, 1990, 29 pp.

[7] Dold, Albrecht; Gonçalves, Daciberg L., *Self-coincidence of fibre maps*, Osaka J. Math. **42** (2005), 291–307.

[8] Duan, Haibao, *Self-maps of the Grassmannian of complex structures*. Compositio Math. **132** (2002), no. 2, 159–175.

[9] Fadell, Edward, *Recent results in the fixed point theory of continuous maps*. Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 10–29.

[10] Fadell, Edward, *Two vignettes in fixed point theory*. In: *Proceedings of the Conference on Topological fixed Point and Applications (Tianjin, China)*. (B. Jiang, ed.) Lecture Notes in mathematics, vol. **1411**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1989, pp. 46–51.

[11] E. Fadell, and S. Husseini, *A fixed point theory for fiber-preserving maps*, Fixed Point Theory (Sherbrooke, Que., 1980), pp. 49–72, Lecture Notes in Math., **886**, Springer, Berlin-New York, 1981.

[12] Fadell, Edward and Husseini, Sufian, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **8** (1988), 73Ð85.

[13] Glover, Henry and Homer, William, *Endomorphisms of the cohomology ring of finite Grassmann manifolds*. Lecture Notes in Math., vol. 657, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1978, 179–193.

[14] Glover, Henry and Homer, William, *Self-maps of flag manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), no. 2, 423–434.
[15] Glover, Henry and Homer, William, *Fixed points on flag manifolds*, Pacific J. Math. **101** (1982), no. 2, 303–306.
[16] Daciberg L. Gonçalves, *Coincidence theory*, Handbook of Topological Fixed Point Theory, 3–42, Springer, Dordrecht, 2005.
[17] D. L. Gonçalves, D. Penteado and J. P. Vieira, *Fixed points on torus fiber bundles over the circle*, Fund. Math. **183** (2004), no. 1, 1 – 38.
[18] D. L. Gonçalves, D. Penteado and J. P. Vieira, *Fixed points on Klein bottle fiber bundles over the circle*, Fund. Math. **203** (2009), no. 3, 263 – 292.
[19] Hoffman, Michael, *Endomorphisms of the cohomology of complex Grassmannians*. Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 745–740.
[20] Hoffman, Michael, *Noncoincidence index, free group actions, and the fixed point property for manifolds*. Pacific J. Math. **136** (1989), no. 1, 129–144.
[21] Hsiang, W. Y., *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups*. Springer-Verlag, 1975.
[22] Husseini, Sufian, *The products of manifolds with the f.p.p. need not have the f.p.p.*. Amer. J. Math. **99** (1977), no. 5, 919–931.
[23] Inoue, Akira, *Borsuk-Ulam type theorems on Stiefel manifolds*. Osaka J. Math. **43** (2006), no. 1, 183–191.
[24] Jerzy Jezierski, *The Nielsen coincidence number of maps into tori*, Quaest. Math. **24** (2001), no. 2, 217 – 223.
[25] Komiya, Katsuhiro, *Borsuk-Ulam theorem and Stiefel manifolds*. J. Math. Soc. Japan **45** (1993), no. 4, 611–626.
[26] McCleary, John, *A user's guide to spectral sequences*. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 58. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
[27] Mimura, M., Toda, H., *Topology of Lie Groups, I and II*. American Mathematical Society, 1991.
[28] Thaís F. M. Monis and Stanisław Spież, *Lefschetz coincidence class for several maps*, J. Fixed Point Theory Appl. **18** (2016), no.1, 61–76.
[29] Thaís F. M. Monis and Peter Wong, *Obstruction theory for coincidences of multiple maps*, Topology and its Applications **229** (2017), 213–225.
[30] Monis, T. F. M., Penteado, N. C. L., Ura, S. T., Wong, P., *A note on nontrivial intersection for selfmaps of complex Grassmann manifolds*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society **24** (2017), no. 4, 665–672.
[31] O'Neil, Larkin S., *On the f.p.p. for Grassmann manifolds*. Ph.D. Thesis, Ohio State University, 1974.
[32] Leticia, S. Silva, *Coincidência de pares de aplicações entre fibrados sobre o círculo com fibra toro,* PhD Thesis, UNESP-São José do Rio Preto/Rio Claro, 2017.
[33] Weslem Silva and J. P. Vieira, *Coincidences of self-maps on Klein bottle fiber bundles over the circle*, JP J. Geom. Topol. **12** (2012), no. 1, 55 – 97.
[34] Spanier, S, *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, New York (1966).
[35] P. Christopher Staecker, *Nielsen equalizer theory*, Topology and its Applications **158** (2011), no. 13 , 1615–1625.
[36] Taghavi, Ali, *An alternative proof for the f.p.p. of* $\mathbb{C}P^{2n}$. Expo. Math. **33** (2015), 105–107.
[37] Vendrúscolo, Daniel; Wong, Peter, *Jiang-Type Theorems for Coincidences of Maps into Homogeneous Spaces*, Topol. Methods Nonlinear Anal. vol. **31**, no. 1 (2008), 151–160.
[38] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics **61**, Springer–Verlag, 1978.
[39] Wong, Peter, *Fixed-point theory for homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **120** (1998), 23–42.
[40] Wong, Peter, *Coincidences of maps into homogeneous spaces*, Manuscripta Math. **98** (1999), 243–254.
[41] Wong, Peter, *Fixed-point theory for homogeneous spaces, II*, Fundamenta Math. **186** (2005), 161–175.