Notas de Aula - Teoria dos Conjuntos

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis
Departamento de Matemática - IGCE - UNESP

Sumário

Introdução

A *Teoria dos Conjuntos* é essencialmente um estudo de números transfinitos (ou infinitos), mas também é uma análise da noção de conjunto.

Georg Cantor (1845-1918) desenvolve praticamente toda a teoria dos conjuntos, chegando ao conceito de número transfinito, incluindo aqui as classes de números cardinais e de números ordinais e estabelecendo a diferença entre essas duas classes.

A *Teoria dos Conjuntos* (TC) desenvolve na Matemática dois papéis:

1. É uma teoria matemática propriamente dita, com objetos de estudo próprios, a saber, os conjuntos e os números transfinitos. Em particular, a TC explicita e refina a nossa noção do conceito de infinito.

2. Ela é um fundamento da matemática no sentido de que todos os objetos matemáticos (números, estruturas, espaços...) podem ser definidos em termos de conjuntos e, portanto, as suas teorias (aritmética, álgebra, etc) podem ser reduzidas à TC.

Como um exemplo do item 2, mostraremos nesse curso como desenvolver toda a aritmética dos números naturais, inteiros, racionais e reais dentro da TC.

Há dois modos de se desenvolver a TC:

1. Ingenuamente, como uma teoria matemática qualquer, sem explicitar o conceito lógico em que ela é desenvolvida;

2. Axiomaticamente, no contexto de uma teoria formal explicitamente dada, isto é, pondo às claras o contexto lógico em que a teoria é desenvolvida.

Vamos aqui tratar a TC por essas duas verdades, ingênua e axiomaticamente....

Boa jornada!

Capítulo 1

O que é um número?

Começamos esse curso com a seguinte questão:

- O que é um número?

Uma resposta possível: um número é uma medida de quantidade. Um número diz quantos objetos existem numa certa coleção de objetos.

Considere o exemplo de uma coleção com dois pares de sapato. Quantos objetos ela tem?

Ora, depende do que consideramos como objeto, isto é, como unidades. Se a unidade é par de sapatos, essa coleção possui 2 pares. Se a unidade é sapato, essa coleção possui 4 sapatos.

Talvez possamos dar uma melhor resposta para a pergunta "o que é um número".

Números dizem quantas unidades uma coleção contém, fixada a unidade.

Tradicionalmente (desde Platão, pelo menos), um número é uma coleção de unidades bem determinadas, idênticas entre si.

Quando duas coleções de objetos têm o mesmo número?

Resposta: Quando existe entre elas uma correspondência biunívoca, isto é, a cada objeto de uma corresponde um único objeto da outra e vice-versa.

Notação: Sejam A e B coleções de objetos.

$$\begin{aligned} A \approx B &\overset{\text{def.}}{:=} \text{ existe uma correspondência biunívoca entre } A \text{ e } B \\ &\overset{\text{def.}}{:=} A \text{ é equinúmero a } B \end{aligned}$$

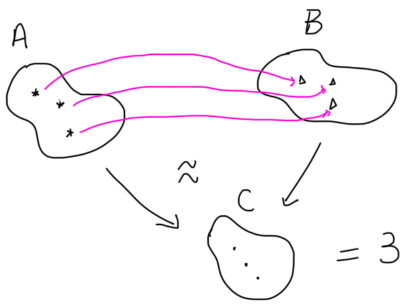

Figura 1.1: O que é o número 3?

Se considerarmos os objetos de duas coleções equinúmeras apenas como unidades (ou seja, sem levar em consideração qualquer particularidade que possam ter), então essas coleções se reduzem ao mesmo conjunto de unidades, o número que corresponde a elas. Ou seja, duas coleções equinúmeras têm o mesmo número.

Assim, se definimos o número de uma coleção de objetos como sendo essa coleção mesma considerando apenas seus objetos como unidades idênticas, então duas coleções tem o mesmo número se, e só se, são equinúmeras (ou seja, quando há uma correspondência biunívoca entre elas).

Se números são coleções de unidades idênticas, quando dois números são iguais?
Resposta: Quando há entre eles uma correspondência biunívoca.

Figura 1.2: $2 \neq 3$

Propriedades da relação de equinumerosidade:

1. $A \approx A$: reflexividade.

2. $A \approx B \Longrightarrow B \approx A$: simetria.

3. $A \approx B$ e $B \approx C \Longrightarrow A \approx C$: transitividade.

Cada classe é caracterizada por um número. Portanto, nada nos impede de tomar qualquer representante da classe como o sendo o número que a caracteriza. Em suma, podemos definir a relação de equinumerosidade entre coleções de objetos e tomar qualquer conjunto das classes de equivalência determinadas por essa relação como sendo o número que caracteriza a sua classe.

notação: $\bar{\bar{A}}$ ou $|A| \overset{\text{def.}}{:=}$ o número cardinal de A ou a cardinalidade de A.

Definição 1.

$$\begin{aligned} 0 &= |\emptyset| \\ 1 &= |\{0\}| \\ 2 &= |\{0,1\}| \\ &\vdots \\ n &= |\{0,1,\ldots,n-1\}| \\ &\vdots \\ \aleph_0 &= |\{0,1,2,\ldots\}| = |\mathbb{N}| \end{aligned}$$

. . . .

Mas há outra resposta à pergunta “o que é número”.

Um número indica uma posição numa ordenação. Por exemplo, o primeiro, o segundo, ..., o décimo oitavo.

Números que medem quantidades: números cardinais.
Números que indicam posição: números ordinais.

O que é uma ordenação? Ou seja, que propriedade deve ter a ordem dos objetos de uma coleção ordenada para que possamos atribuir a cada um deles uma posição bem ordenada.
Resposta: Cada parte dessa coleção ordenada que contenha algum objeto deve ter um menor objeto, ou seja, um mínimo.

Definição 2. $<$ *é uma relação de* ***ordem estrita*** *se:*

1. $a \not< a$, *para todo* a *de* A *(irreflexibilidade).*
2. $a < b$ *e* $b < c$ *então* $a < c$, *para todos* a, b, c *de* A *(transitividade).*

Definição 3. *A relação* $\leq$ *é uma* ***ordem parcial*** *se:*

1. $a \leq a$ *para todo* $a \in A$ *(reflexibilidade).*
2. $a \leq b$ *e* $b \leq c$ *então* $a \leq c$ *para todo* a, b, c *de* A *(transitividade).*
3. $a \leq b$ *e* $b \leq a$ *então* $a = b$ *para todo* a, b *de* A *(anti-simetria).*

$\leq$ *é uma* ***ordem total (linear)*** *se valem* 1), 2), 3) *e*

4. $a \leq b$ *ou* $b \leq a$ *para todo* a, b *de* A.

Definição 4. *Uma ordem parcial é uma* ***boa-ordem*** *se qualquer parte dela que contém algum elemento contém um mínimo.*

. . . .

Exercícios

1. Seja $<$ uma ordem estrita e defina $\leq$ como

$$a \leq b \iff a < b \text{ ou } a = b.$$

   Mostre que $\leq$ é uma ordem parcial.

2. Seja $\leq$ uma ordem parcial. Defina $<$ como

$$a < b \iff a \leq b \text{ e } a \neq b.$$

   Mostre que $<$ é uma ordem estrita.

3. Mostre que toda boa ordem é uma ordem total.

. . . .

Definição 5. *Sejam* $(A, \leq_A)$ *e* $(B, \leq_B)$ *boas ordens.*

$$A \sim B \Longleftrightarrow \exists\, f : A \to B,\ f \text{ bijeção, tal que } a \leq_A b \Longrightarrow f(a) \leq_B f(b).$$

Nessas condições, dizemos que A *e* B *são* ***do mesmo tipo de ordem.***

Teorema 1.

1. $A \sim A$.
2. $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$.
3. $A \sim B$ e $B \sim C \Longrightarrow A \sim C$.

Demonstração.

1. Basta considerar a função identidade.

2. Se $A \sim B$ então existe $f : A \to B$, f bijeção, com a propriedade $a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$.

   Como f é bijeção, existe $f^{-1} : B \to A$ bijeção com $f \circ f^{-1} = Id_B$ e $f^{-1} \circ f = Id_A$.

   Sejam $b_1, b_2 \in B$ tais que $b_1 \leq b_2$. Como f é bijeção, existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $b_1 = f(a_1)$ e $b_2 = f(a_2)$ e, então, $f^{-1}(b_1) = a_1$ e $f^{-1}(b_2) = a_2$. Suponhamos $f^{-1}(b_1) \not\leq f^{-1}(b_2)$, isto é, $a_1 \not\leq a_2$. Como $(A, \leq)$ é uma boa-ordem, segue que é uma ordem total. Então, $a_2 < a_1$. Segue que $f(a_2) = b_2 < b_1 = f(a_1)$ (contradição!).

   Portanto, $f^{-1}(b_1) \leq f^{-1}(b_2)$.

   $\therefore B \sim A$.

3. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ bijeções tais que $a_1 \leq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$ e $b_1 \leq b_2 \Longrightarrow g(b_1) \leq g(b_2)$ para todo $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$.

   Consideremos $h = g \circ f : A \to C$. Então, h é bijeção pois f e g o são. Ainda:

   $$a_1 \leq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \leq f(a_2) \Longrightarrow g(f(a_1)) \leq g(f(a_2)) \Longrightarrow g \circ f(a_1) \leq g \circ f(a_2).$$

   $\therefore A \sim C$.

$\square$

O teorema acima mostra que os conjuntos bem ordenados dividem-se em classes de equivalência.

Definição 6. *Seja $(A, \leq)$ um conjunto bem ordenado. Definimos o* ***tipo ordinal*** *(tipo de ordem) ou* ***número ordinal*** *de A como sendo qualquer conjunto B tal que $B \sim A$.*
Notação: $\bar{A}$ ***ou t.o.*** A.

Exemplo 1. *Seja $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ com a ordem $0 \leq 1 \leq \cdots \leq n-1$. Evidentemente, com essa ordem, n é bem-ordenado. Definimos $\bar{n} := n$.*

Afirmação: Todo conjunto totalmente ordenado finito é uma boa-ordem. Ora, seja $(A, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e finito e seja S um subconjunto não vazio qualquer de A. Seja x_0 um elemento qualquer de S. Se x_0 for o mínimo de S então acabou. Se não, existe x_1 em S tal que $x_1 \leq x_0$, com $x_1 \neq x_0$ (pois A é uma ordem total). Ainda, como $(A, \leq)$ é uma ordem parcial, $x_1 \leq x$ para todo x de A tal que $x_0 \leq x$. Se x_1 for elemento mínimo de S, acabou, caso contrário, existe x_2 em S com $x_2 \leq x_1$, e $x_2 \neq x_1$. Procedendo desse modo sucessivamente, como A é finito, uma hora o processo acaba, determinando-se assim o elemento mínimo de S.

Exemplo 2. *$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ com a ordem natural é bem-ordenado. Escrevemos $\omega = \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.*

Considere agora $\mathbb{N}$ com a seguinte ordem:

$$1 \leq 2 \leq 3 \leq \cdots \leq 0.$$

Essa é uma boa-ordem em $\mathbb{N}$.

O número ordinal dessa boa-ordem é igual a ω? Não.

Suponha $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ uma bijeção que preserva a ordem, onde $\mathbb{N}_0$ é o conjunto $\mathbb{N}$ com a ordem definida acima. Como $a \leq 0$ para todo $a \in \mathbb{N}_0$, segue que $f(a) \leq f(0) = n$ para todo $a \in \mathbb{N}_0$. Como f é bijeção, existe $b \in \mathbb{N}_0$ com $f(b) = n + 1$. Então

$$n + 1 = f(b) \leq f(0) = n \text{ (absurdo!)}$$

Logo, o número ordinal de $\mathbb{N}_0$ é distinto do número ordinal de $\mathbb{N}$.

Note porém que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$, ou seja, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$ são conjuntos bem ordenados com o mesmo número cardinal mas com números ordinais diferentes.
Notação: $\overline{\mathbb{N}_0} = \omega + 1$.

Note que $\overline{\mathbb{N}_0 \setminus \{0\}} = \omega$.

Seja $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$ com a ordem usual em $\mathbb{N}$ e a estipulação que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq \omega$. É claro que esse conjunto é bem ordenado. Qual é o número ordinal dessa boa ordem? **Resposta:** $\omega + 1$.

Seja agora $\mathbb{N} \cup \{\omega, \omega + 1\}$ com a seguinte ordem:

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots \leq \omega \leq \omega + 1.$$

O número ordinal dessa ordem é igual a ω? **Não!**

O número ordinal dessa ordem é igual a $\omega + 1$? **Não!**

O número ordinal desse conjunto = ele próprio $\overset{\text{def.}}{:=} \omega + 2$.

E, recursivamente,

$$\omega + n = \overline{\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega + (n - 1)\}}.$$

Observe que $|\omega + n| = \aleph_0$.

Definição 7. *Dizemos que um conjunto é* ***infinito enumerável*** *se sua cardinalidade é igual a* $\aleph_0$.

Considere a seguinte ordenação em $\mathbb{N}$:

$$n \leq n + 1 \leq n + 2 \leq \cdots \leq 0 \leq 1 \leq \cdots \leq n - 1.$$

Seja $\mathbb{N}_{n-1}$ o conjunto $\mathbb{N}$ com essa ordenação. Então $\mathbb{N}_{n-1}$ é uma boa ordem e $\overline{\mathbb{N}_{n-1}} = \omega + n$.

Definição 8. $\omega + \omega \overset{\text{def.}}{:=} \overline{\{0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}}$.

Seja $\mathbb{N}$ com a seguinte ordenação:

$$0 \leq 2 \leq 4 \leq \cdots \leq 1 \leq 3 \leq 5 \leq \cdots$$

Esse conjunto é bem ordenado e seu número ordinal é $\omega+\omega$. Observe que $|\omega+\omega| = \aleph_0$.

Observação 1. *Boas ordens surgem naturalmente nos processos idealizados de contagem. Contar (idealmente) os elementos de um conjunto é introduzir nele uma boa ordem.*

Assim, números ordinais são o resultado (idealizado) de contagens.

Nota: Qualquer contagem de conjuntos finitos resulta sempre no mesmo número ordinal, pois todas as boas ordens finitas de uma cardinalidade determinada têm o mesmo tipo ordinal, ou seja, se $|A| = n$ então $\overline{A} = n$, não importa que ordem linear que impomos a A (note que toda ordem linear finita é uma boa ordem).

. . . .

Exercícios

1. Defina em $\mathbb{N}$ uma boa ordem tal que o número ordinal da boa ordem resultante seja $\omega + 7$.

2. Mostre explicitamente que $|\omega + \omega| = \aleph_0$.

3. Defina uma boa ordem em $\mathbb{Z}$ cujo número ordinal seja:

    (a) ω.

    (b) $\omega + 1$.

    (c) $\omega + \omega$.

. . . .

Capítulo 2

A noção de infinito

Definição 9. *A é* ***infinito***$_1$ *se, e só se, não existe bijeção entre A e algum número natural. E A é* ***finito***$_1$ *quando A não é* ***infinito***$_1$.

Definição 10. *A é* ***infinito***$_2$ *se, e só se, existe uma bijeção entre A e $B \subsetneq A$ (o símbolo $\subsetneq$ significa que está contido mas que é diferente). E A é* ***finito***$_2$ *quando A não é* ***infinito***$_2$.

Obviamente:

1. A é finito$_1$ $\iff$ existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção entre A e n.

2. A é finito$_2$ $\iff$ não existe bijeção entre A e $B \subsetneq A$.

Lema 1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, n é finito$_2$.*

Demonstração. Por indução em n:

Para $n = 0$ o resultado é imediato pois o $\emptyset$ não admite subconjunto próprio.

Hipótese Indutiva: n é finito$_2$.
Tese: $n + 1$ é finito$_2$.
Suponhamos, por contradição, que existe uma bijeção $f : n + 1 \to B \subsetneq n + 1$.
1o. caso: $f(n) = n$. Então, $f|n : n \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \setminus \{n\} \subsetneq n$ é uma bijeção, uma contradição!
2o. caso: $f(n) \neq n$.

Sub-caso 2.1: $n \in B$. Sejam $m, k \in n$ tais que $f(m) = n$ e $f(n) = k$. Defina $g : n \to B \setminus \{n\} \subsetneq n$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq m \\ k, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Veja que g é uma bijeção, contradizendo a hipótese de indução.

Sub-caso 2.2: $n \notin B$: Então $g : n \to B \setminus f(n) \subsetneq n$ dada por $g(x) = f(x)$ é uma bijeção, contradizendo a hipótese de indução.

Logo, não existe bijeção $f : n + 1 \to B \subsetneq n + 1$.

Portanto, n é finito$_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 2. *finito*$_1 \Longrightarrow$ *finito*$_2$.

Demonstração. Seja A finito$_1$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \approx n$. Suponha, por contradição, A infinito$_2$. Então, existe uma bijeção $g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \subsetneq A$. Seja $f : n \to A$ uma bijeção. Então,

$$f^{-1} \circ g \circ f : n \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow f^{-1}(B) \subsetneq n$$

é bijeção, o que nos dá que n é infinito$_2$, uma contradição.

Portanto, A é finito$_2$.

□

Proposição 1. *Se A é infinito$_2$ e $A \subset B$ então B é infinito$_2$.*

Demonstração. Por hipótese, existe uma bijeção $f : A \to C$, $C \subsetneq A$. Defina $g : B \to C \cup (B \setminus A)$ por

$$g(b) = \begin{cases} f(b), & \text{se } b \in A \\ b, & \text{se } b \notin B \setminus A \end{cases}$$

Assim definida, g é uma bijeção entre B e $C \cup (B \setminus A) \subsetneq B$.

Portanto, B é infinito$_2$. □

Proposição 2. $\mathbb{N}$ *é infinito*$_2$.

Demonstração. Basta considerar a bijeção $f : \mathbb{N} \to B \subsetneq \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$, onde $B = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\square$

Proposição 3. *Se A é infinito$_2$ e $A \approx B$ então B é infinito$_2$.*

Demonstração. Sejam $f : A \to C \subsetneq A$ e $g : B \to A$ bijeções. Então, $g^{-1} \circ f \circ g : B \to g^{-1}(C) \subsetneq B$ é uma bijeção.

$\square$

Teorema 3. *infinito$_1$ $\Longrightarrow$ infinito$_2$.*

Demonstração. Suponhamos A infinito$_1$. Ou seja, não existe bijeção entre A e qualquer número natural n. Vamos definir, por recursão, uma função injetora $h : \mathbb{N} \to A$:

$$h(0) = \text{qualquer elemento de } A \ (A \neq \emptyset \text{ pois } A \not\approx 0)$$

$$\vdots$$

$$h(n+1) = \text{qualquer elemento de } A \setminus \{h(0), h(1), \ldots, h(n)\}$$

$(A \neq \{h(0), \ldots, h(n)\}$ pois $A \not\approx n + 1)$.

h é injetora pois, pela definição de h, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $h(n) \neq h(0), h(1), \ldots, h(n-1)$. Portanto, $im(h)$ é infinito$_2$. Como $im(h) \subset A$, segue que A é infinito$_2$.

$\square$

Corolário 1. *As duas definições de infinito são equivalentes.*

....

Experimento: O Hotel de Hilbert.

Jeff Dekofsky (TED-Ed)

Matemática Multimídia UNICAMP

....

Teorema 4. $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$.

Demonstração. Considere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(2n) = n \ (n \in \mathbb{N})$$

$$f(2n-1) = -n.$$

$\square$

Teorema 5. $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}$.

Demonstração.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}$$

$\square$

Teorema 6. *Se* $A_i \approx \mathbb{N}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ *então*

$$\bigcup A_i \approx \mathbb{N}.$$

Demonstração. $A_i \approx \mathbb{N} \Longrightarrow A_i = \{a_i^0, a_i^1, \ldots, a_i^n, \ldots\}$. Assim,

$$\begin{array}{rcl}
A_0 & = & \{a_0^0, a_0^1, a_0^2, \ldots\} \\
A_1 & = & \{a_1^0, a_1^1, a_1^2, \ldots\} \\
A_2 & = & \{a_2^0, a_2^1, a_2^2, \ldots\} \\
\vdots & &
\end{array}$$

$\square$

Como já definimos anteriormente, A é infinito enumerável quando a sua cardinalidade é $\aleph_0$, ou seja, $A \approx \mathbb{N}$.

Teorema 7. *Sejam A e B finitos. Então $A \cup B$ é finito.*

Demonstração. A finito $\Longrightarrow A \approx n \Longrightarrow A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

B finito $\Longrightarrow B \approx m \Longrightarrow B = \{b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}\}$.

Escreva $b_k = a_{n+k}$. Então,

$$A \cup B = \{a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots, a_{n+m-1}\}.$$

Assim, existe $f : n+m \to A \cup B$, f sobrejetora. Pode ser que f não seja injetora, mas:
Fato: Seja $f : X \to Y$. Então, existe $g : X' \subset X \to im(f)$ bijetora. Basta usar devidamente o **Axioma da escolha**.

Portanto, seja g uma bijeção de um subconjunto de $n+m$ em $A \cup B$.

Logo, $A \cup B$ é finito.

□

Definição 11. *Um conjunto é* ***enumerável*** *se é finito ou infinito enumerável, ou seja, se for equinúmero a $\mathbb{N}$ ou a algum $n \in \mathbb{N}$.*

Corolário 2. *A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Teorema 8. *Seja A um conjunto enumerável. Então o conjunto dos subconjuntos finitos de A é enumerável.*

Demonstração. **Notação:**

$$\begin{aligned} P_f(A) &= \{B \subseteq A \mid B \approx n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \text{conjunto das partes finitas de } A. \end{aligned}$$

1o. caso: A finito $\Longrightarrow P_f(A) = P(A) =$ conjunto das partes de A.

$A = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \approx n$, algum $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos, por indução em n, que $P(A) \approx 2^n$:

Se $n = 0$, então $A = \emptyset$ e, assim, $P(A) = \{\emptyset\} \approx 1 = 2^0$.

Hipótese de indução: $A \approx n - 1 \Longrightarrow P(A) \approx 2^{n-1}$.

Passo indutivo: $A \approx n$.

Seja $a \in A$ qualquer. O número de subconjuntos de A que não contém a é, por hipótese indutiva, 2^{n-1}. Segue que o número de subconjuntos de A que contém a é também 2^{n-1}.

Portanto, $P(A) \approx 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

2o. caso: A infinito enumerável, ou seja, $A \approx \mathbb{N}$.

Defina

$$P_0(A) = \{B \subseteq A \mid B \approx 0\} = \{\emptyset\}.$$

Então, $P_0(A) \approx 1$.

$$P_1(A) = \{B \subset A \mid B \approx 1\}.$$

Então, $P_1(A) \approx A \approx \mathbb{N}$.

E, de modo geral, defina $P_n(A) = \{B \subseteq A \mid B \approx n\}$ e mostre, por indução em n, que $P_n(A) \approx \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (exercício).

Segue que

$$P_f(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n(A)$$

é enumerável pois é reunião enumerável de conjuntos enumeráveis. Na verdade, nesse caso, $P_f(A)$ é infinito enumerável. $\square$

. . . .

Exercícios

1. Seja A infinito enumerável, ou seja, $A \approx \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $P_n(A) = \{B \subseteq A \mid B \approx n\}$ e mostre, por indução em n, que $P_n(A) \approx \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Solução: $n = 1$: Ok!

Hipótese de indução: $P_n \approx \mathbb{N}$.

Tese: $P_{n+1} \approx \mathbb{N}$.

Da hipótese de indução, $P_n(A) = \{B_0, B_1, B_2, \ldots\}$. E, como A é enumerável,

$$A = \{a_0^0, a_0^1, a_0^2, \ldots, a_1^0, a_1^1, a_1^2, \ldots\}$$

onde $a_i^j \notin B_i$, $j = 0, 1, \ldots$. Use o método da diagonal de Cantor para a contagem dos elementos de P_{n+1}:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(A) \quad = \{ \quad & B_0 \cup \{a_0^0\}, B_0 \cup \{a_0^1\}, \ldots \\ & B_1 \cup \{a_1^0\}, B_1 \cup \{a_1^1\}, \ldots \\ & B_2 \cup \{a_2^0\}, B_2 \cup \{a_2^1\}, \ldots \\ & \vdots \end{aligned}$$

O método de contagem acima mostra que $P_n(A)$ é enumerável, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Resta provar que $P_n(A)$ é infinito, $n \neq 0$. Suponha, por contradição, que $P_n(A)$ é finito. Mas

$$A = \bigcup B, \; B \in P_n(A)$$

nos daria A como união finita de conjuntos finitos, donde A seria finito, uma contradição.

Portanto, $P_n(A)$ é infinito enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

. . . .

Teorema 9. $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ *é não enumerável.*

Demonstração. Primeiramente, $(0, 1)$ é infinito pois $f : (0, 1) \to (0, 1/2)$ dada por

$$f(x) = x/2$$

é uma bijeção.

Suponhamos, por absurdo, que $(0, 1)$ seja infinito enumerável. Seja, então, $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$ uma bijeção. Denotando $x_n = f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, listamos $(0, 1)$ por $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Defina $x = 0, n_1 n_2 \ldots\ldots$, onde

$$n_i = \begin{cases} 1, & \text{se a } i\text{-ésima casa decimal de } x_i \text{ é diferente de 1} \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos que $x \in (0,1)$ e, portanto, $x = x_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Mas, pela definição de x, se a k-ésima casa decimal de x é 1 então a k-ésima casa decimal de x é 2 e se a k-ésima casa decimal de x é diferente de 1 então a k-ésima casa decimal de x é 1, uma contradição!

Logo, $(0,1)$ é infinito enumerável.

□

Teorema 10. $(0,1) \approx \mathbb{R}$.

Demonstração. Basta considerar a função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{tg}(\pi x - \pi/2),$$

a qual é uma bijeção.

□

. . . .

Capítulo 3

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

Nos nossos anos de estudo em Matemática, nas diversas disciplinas (teoria de grupos, teoria de anéis, espaços topológicos, etc.), nos deparamos com uma sentença recorrente no início do desenvolvimento dessas: “Seja X um conjunto”. Parece que o “tijolinho” de tudo aqui são os conjuntos: um número real é uma sequência de números racionais, uma função real é um conjunto de pares ordenados de números reais, um espaço L^p é um conjunto de funções, etc. Analisando argumentos matemáticos, os lógicos se convenceram de que a noção de “conjunto” é o conceito mais fundamental da Matemática. Isso não significa diminuir o caráter fundamental dos números naturais. Na verdade, uma posição muito razoável seria aceitar os números naturais como entidades primitivas e, então, usar conjuntos para formar entidades superiores. No entanto, pode-se demonstrar que mesmo a noção de número natural pode ser derivada da noção abstrata de conjunto, o que fizemos nos capítulos anteriores. De modo que, no nosso sistema, todos os objetos serão conjuntos e não postularemos a existência de nenhum outro objeto primitivo. Grosso modo, pensaremos no nosso universo como que formado por todos os conjuntos que podem ser obtidos por sucessivos “processos de coleta” a partir do conjunto vazio.

O primeiro conjunto de axiomas para uma teoria de conjuntos foi dado por E. Zermelo em 1908. Esse sistema foi desenvolvido posteriormente por A. Fraenkel e hoje é usualmente referido como Teoria dos Conjuntos Zermelo-Fraenkel (ZF). Enunciaremos abaixo os axiomas para a Teoria dos Conjuntos ZF, com alguns comentários.

1. **Axioma de extensionalidade.**

$$\forall x,\ y\ (\forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y).$$

O axioma de extensionalidade nos diz que um conjunto é determinado pelos seus elementos.

Definição 12. $x \subseteq y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \longrightarrow z \in y)$.

2. **Axioma do conjunto vazio.**

$$\exists x\ \forall y(\neg y \in x).$$

O conjunto definido por esse axioma é o conjunto vazio, o qual denotamos por $\emptyset$.

Corolário 3. *Só existe um conjunto vazio.*

3. **Axioma dos pares não ordenados.**

$$\forall x,\ y\ \exists z\ \forall w(w \in z \longleftrightarrow w = x \vee w = y).$$

Notação: $z = \{x, y\}$. Também, $\{x\}$ é $\{x, x\}$.

4. **Axioma da união.**

$$\forall x\ \exists y(\forall z(z \in y \longleftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w))).$$

Notação: $y = \bigcup x$.

Esse axioma nos diz que y é a união de todos os conjuntos em x. Em particular, usando o Axioma 3, podemos deduzir que, dados x e y, existe z tal que $z = x \bigcup y$.

Exemplos: $\bigcup \emptyset = \emptyset$; $x = \{a\}$, $\bigcup x = \bigcup \{a\} = a$.

Para motivar o próximo axioma, lembre-se que dado um natural n, o seu sucessor é definido como sendo $n + 1 = n \cup \{n\}$. Então, o seguinte axioma nos garante a existência de um conjunto que contém todos os naturais e, portanto, é infinito.

5. **Axioma do Infinito.**

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \longrightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

Em Matemática, costumamos tomar conjuntos caracterizando-os por alguma propriedade. No entanto, tal generalidade pode nos levar a contradições. Contradições tais como o paradoxo de Russel: considerar o conjunto de todos os conjuntos que não possuam a si próprios como elementos. O Axioma da Substituição restringe os tipos de propriedades permitidas para a obtenção de conjuntos.

6. **Axioma da Substituição.**

$$\forall t_1, \ldots, t_k \; \forall x \; \exists y \; \forall z (z \in y \longleftrightarrow z \in x \wedge A_n(z; t_1, \ldots, t_k)).$$

Aqui, $A_n(z; t_1, \ldots, t_k)$ abrange todas as fórmulas com pelo menos uma variável livre. Então, o Axioma da Separação nos diz que para todo conjunto x existe o conjunto y de todos os z em x satisfazendo a propriedade A.

Um pouco mais sobre o Axioma da Substituição:

Se H é uma função e A é um conjunto, então $H(A)$ é um conjunto pois está contido no contra-domínio da função, que é um conjunto. Agora, considere H algo como uma "função entre classes" e não uma função no sentido usual, entre conjuntos, ou seja, H é uma **classe** de pares ordenados que satisfaz a condição que temos para funções de que

$$(x, y), (x, z) \in H \Longrightarrow y = z,$$

exceto que H não é necessariamente um conjunto. A pergunta que se coloca é a seguinte: é verdade que, ainda assim, se tomamos A um conjunto, $H(A)$ é conjunto? O Axioma da Substituição irá nos dizer que sim. Na Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel, não podemos nos referir a uma classe H; em vez disso, utilizamos uma fórmula φ que define H.

Axioma da Substituição: Para toda fórmula $\varphi(x, y)$ não contendo a letra B, o seguinte é um axioma:

$$\begin{aligned} \forall A[(\forall x \in A) \; \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2) \\ \Longrightarrow \exists B \; \forall y (y \in B \Longleftrightarrow (\exists x \in A) \; \varphi(x, y))]. \end{aligned}$$

Para traduzir o Axioma da Substituição em palavras, defina a classe

$$H = \{(x, y) \mid x \in A \wedge \; \varphi(x, y)\}.$$

Então, a hipótese do axioma,

$$(\forall x \in A)\ \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2),$$

nos assegura que H é uma função entre classes. E a segunda linha,

$$\exists B\ \forall y (y \in B \Longleftrightarrow (\exists x \in A)\ \varphi(x, y)),$$

nos assegura que, se colocamos

$$B = \{y \mid (\exists x \in A)\ \varphi(x, y)\} = H(A),$$

então B é um conjunto.

Um outra forma alternativa de traduzir o Axioma da Substituição em palavras é a seguinte: leia $\varphi(x, y)$ como "x nomeia y". Então, a hipótese do axioma nos diz que "cada membro de A nomeia no máximo um objeto". E a conclusão nos diz que "a coleção dos objetos nomeados é um conjunto".

O nome "substituição" reflete a ideia de substituir cada x no conjunto A pelo objeto por ele nomeado (se for o caso) de modo a obter o conjunto B.

Exemplo 3. *Se A é um conjunto, então $\{P(a) \mid a \in A\}$ é também um conjunto, onde $P(a)$ é o conjunto das partes de a. Basta tomar $\varphi(x, y)$ como sendo $y = P(x)$. Isto é, cada x nomeia o seu conjunto das partes. O Axioma da Substituição nos diz que a coleção de todos os conjuntos das partes dos elementos de um conjunto A forma um conjunto.*

No exemplo abaixo, utilizamos o Axioma da Substituição para garantir o conjunto interseção de dois conjuntos.

Exemplo 4. *Defina a interseção utilizando a fórmula*

$$F(x) = \forall y (y \in a \longrightarrow x \in y)$$

e, então,

$$\bigcap a \overset{def.}{:=} \{x \in \bigcup a \mid F(x)\}.$$

7. **Axioma do conjunto das partes ou conjunto potência.**

$$\forall x \; \exists y \; \forall z (z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x).$$

Notação: $y = P(x) \overset{\text{def.}}{:=}$ conjunto das partes de x.

Exemplo: $x = \emptyset$, $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

8. **Axioma da Fundamentação.**

$$\forall a \neq \emptyset \; \exists y \in a \;\; : \;\; a \cap b = \emptyset.$$

Este axioma é um tanto artificial e o incluímos apenas por razões técnicas. Nunca é usado na matemática convencional. Ele diz que cada conjunto não-vazio contém um elemento mínimo com respeito à relação $\in$. Intuitivamente, desejamos que todos os nossos conjuntos sejam construídos a partir do $\emptyset$ e, então, não queremos ter cadeias descendentes infinitas com respeito a $\in$; em vez disso, todas as cadeias descendentes devem terminar com $\emptyset$.

. . . .

Exercícios

1. <u>Axioma da regularidade:</u> Todo conjunto não vazio A possui um elemento m com $m \cap A = \emptyset$.

   <u>Axioma do par:</u> Para quaisquer conjuntos u e v, existe um conjunto tendo como membros exatamente u e v.

   Usando o Axioma da Regularidade e o Axioma do Par, prove que não existem conjuntos a e b com $a \in b$ e $b \in a$.

. . . .

Capítulo 4

Pares ordenados, funções e produto cartesiano

4.1 Pares ordenados e funções

Definição 13. *Sejam A e B conjuntos.*

$$B^A \overset{def.}{:=} \{f : A \to B \mid f \text{ função}\}.$$

Pergunta: Se $A = \emptyset$ quem é B^A?

Mas antes:

Pergunta: O que é função? $f : A \to B$ função $\iff$

$$f = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\} \text{ tal que } \forall\ a \in A,\ \exists! b \in B\ :\ (a, b) \in f.$$

Pergunta: O que é um par ordenado?

Definição 14. *Sejam a e b conjuntos. O par ordenado (a, b) é definido por*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Teorema 11. $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ *e* $b = d$.

Demonstração. ($\Longleftarrow$) trivial.
($\Longrightarrow$) Suponha $(a, b) = (c, d)$, ou seja, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Pelo princípio de extensionalidade, esses conjuntos são iguais só se possuem os mesmos elementos. Temos dois casos:

$$\{a\} = \{c\} \text{ e } \{a, b\} = \{c, d\} \Longrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

ou

$$\{a\} = \{c, d\} \text{ e } \{a, b\} = \{c\} \Longrightarrow a = c = d \text{ e } a = b = c.$$

□

Retornando à pergunta "Se $A = \emptyset$ quem é B^A?", veja que, com o entendimento que temos agora,

$$f \in B^{\emptyset} \Longleftrightarrow f = \{(a, b) \mid a \in \emptyset \text{ e } b \in B\} = \emptyset.$$

Portanto, existe um único elemento em $B^{\emptyset}$, a saber, a função vazia. Isso é verdade mesmo que $B = \emptyset$.

Teorema 12. *Seja A um conjunto qualquer. Então $2^A \approx P(A)$.*

Demonstração. Temos

$$2^A = \{f : A \to 2 \mid f \text{ é função}\} = \{f : A \to \{0, 1\} \mid f \text{ é função}\}$$

e

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Considere $F : P(A) \to 2^A$ dada por

$$\begin{array}{rcl} B \subseteq A & \mapsto & \xi_B : A \to \{0, 1\} \\ & & \xi_B(a) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } a \in B \\ 0, & \text{se} a \notin B \end{array} \right. \end{array}$$

<u>F é sobrejetora:</u> Seja $f \in 2^A$ e considere $B = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$. Obviamente, $F(B) = \xi_B = f$.

<u>F é injetora:</u> Sejam $B, C \subseteq A$ tais que $\xi_B = \xi_C$. Veja que

$$c \in C \Longleftrightarrow \xi_C(c) = 1 = x_B(c) \Longleftrightarrow c \in B.$$

$\therefore\ C = B$.

Por tudo isso, F é uma bijeção de $P(A)$ sobre 2^A e, assim, $2^A \approx P(A)$.

□

Corolário 4. *Se* $A \approx n$ *então* $2^A \approx 2^n$.

Observação 2. $2^\emptyset \approx 2^0 = 1, \quad \emptyset^\emptyset \approx 1.$

Teorema 13 (Teorema de Cantor)**.** *Se* A *é infinito então* $P(A)$ *é não enumerável.*

Demonstração. Trataremos primeiramente o caso em que A é infinito enumerável. Tomando A infinito enumerável, suponha, por absurdo, $P(A)$ enumerável.

Seja $B_0, B_1, \ldots$ uma enumeração de $P(A)$.

Seja $a_0, a_1, \ldots$ uma enumeração de A.

Defina $B \subseteq A$ do seguinte modo:

$$a_i \in B \iff a_i \notin B_i.$$

Por hipótese, $B = B_k$ para algum k.

Pergunta: a_k pertence ou não a B_k?

Se $a_k \in B_k$ então $a_k \notin B = B_k$ e se $a_k \notin B_k$ então $a_k \in B = B_k$, absurdo!

Logo, $P(A)$ é não enumerável.

Seja, agora, A um conjunto infinito qualquer. Logo, para qualquer n natural existe uma função injetora (mas não sobrejetora) de n em A. (exercício: demonstre esse fato fazendo indução em n).

Logo, existe uma função injetora $f : \mathbb{N} \to A$. Portanto, A possui um subconjunto infinito enumerável (a imagem de f).

Portanto, $P(A)$ contém um subconjunto infinito não-enumerável.

Logo, $P(A)$ é não-enumerável.

$\square$

. . . .

Aplicação: Seja $P = \{p \mid \text{polinômios sobre } \mathbb{Q}\}$. Cada $p \in P$ é caracterizado pelo seu grau e seus coeficientes; ou seja, por um subconjunto finito de números racionais. Logo, $P \approx \mathbb{N}$.

Temos que cada $p \in P$ possui uma quantidade finita de raízes.

Definição 15. *Um número real é* ***algébrico*** *quando é raiz de um polinômio não nulo sobre* $\mathbb{Q}$.

Seja $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ é algébrico}\}$. Logo, $A \approx \mathbb{N}$ (pois existe uma quantidade enumerável de polinômios sobre $\mathbb{Q}$ e cada polinômio possui uma quantidade finita de raízes). Mas $\mathbb{R}$ é não enumerável. Logo, existem números reais transcendentes, isto é, números reais que não são algébricos.

. . . .

Exercícios:

1. Sejam A, B conjuntos quaisquer. Então existem $A' \approx A$ e $B' \approx B$ tal que $A' \cap B' = \emptyset$.

2. $A \approx B$ e $C \approx D \Longrightarrow A^C \approx B^D$.

3. $B \cap C = \emptyset \Longrightarrow A^{B \cup C} \approx A^B \times A^C$.

4. $(A^B)^C \approx A^{B \times C}$.

. . . .

Definição 16. *Dados conjuntos* A *e* B*, escreveremos* $A \preceq B$ *quando existir uma função injetora* $f : A \to B$.

Teorema 14. $A \preceq P(A)$, *mas* $A \not\approx P(A)$.

Demonstração. Considere $f : A \to P(A)$

$$a \mapsto \{a\}.$$

f é claramente injetora. Logo, $A \preceq P(A)$.

Suponhamos, por absurdo, que $A \approx P(A)$. Seja então $F : A \to P(A)$ uma bijeção. Considere o subconjunto B de A tal que

$$b \in B \Longleftrightarrow b \notin F(b).$$

Como F é bijeção, existe $c \in A$ tal que $F(c) = B$.
Pergunta: $c \in B$ ou $c \notin B$?

$$c \in B = F(c) \Longrightarrow c \notin F(c) \text{ (contradição!)}$$
$$c \notin B = F(c) \Longrightarrow c \in B \text{ (contradição!)}$$

Logo, não existe bijeção entre A e $P(A)$.

$\square$

Lema 2. *Se $C \subseteq A$ e $A \preceq C$ então $A \approx C$.*

Demonstração. Seja $A_0 = A - C = \{a \in A \mid a \notin C\}$.

Por hipótese, existe $f : A \to C$ uma função injetora. Definimos por recursão:

$$\begin{aligned}
A_1 &= f(A_0) = \{c \in C \mid c = f(a),\ a \in A_0\} \\
A_2 &= f(A_1) \\
&\vdots \\
A_n &= f(A_{n-1}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Considere

$$\tilde{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

e defina $F : A \to C$ por

$$F(a) = \begin{cases} a, & \text{se } a \notin \tilde{A} \\ f(a), & \text{se } a \in \tilde{A} \end{cases}$$

Então:

1. F é função;

2. F é injetora;

3. F é sobrejetora: Seja $a \in C$ tal que $a \notin \tilde{A}$. Então, $a = F(a)$. Seja $a \in C$ tal que $a \in \tilde{A}$. Então, $a \in C \cap A_n$ para algum $n \in N$. Note que $n \neq 0$ pois $A_0 = A - C$. Assim, $a = f(a')$ para algum $a' \in A_{n-1}$, ou seja, $a = F(a') = f(a')$, $a' \in A_{n-1}$.

   $\therefore F$ é sobrejetora.

Logo, $A \approx C$. $\square$

Corolário 5. *(Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder) Sejam A e B conjuntos tais que $A \preceq B$ e $B \preceq A$. Então, $A \approx B$.*

Demonstração. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ injetoras. Seja $C = im(g) \subseteq A$. Temos $g \circ f : A \to C$ injetora. Logo, pelo lema anterior, $A \approx C = im(g) \approx B$.

$\therefore A \approx B$.

□

Aplicação: $[0,1] \approx \mathbb{R}$ pois $(0,1) \preceq [0,1] \preceq \mathbb{R} \preceq (0,1)$.

4.2 Produto cartesiano

Seja $\{A_i\}_{i\in I} = im(F)$, onde $dom(F) = I$ e $F(i) = A_i$, uma família de conjuntos. Define-se o produto cartesiano dessa família por:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A \times B = \prod_{i\in 2,\ A_0=A,\ A_1=B} A_i &= \{f : 2 \to A_0 \cup A_1 \mid f(0) \in A_0,\ f(1) \in A_1\} \\ &= \{(f(0), f(1)) \mid f(0) \in A,\ f(1) \in B\}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.

1. *$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$, onde $A_i = 2$, para todo $i \in \mathbb{N}$:*

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{f : \mathbb{N} \to 2\} = 2^{\mathbb{N}} \approx P(\mathbb{N}),$$

o qual é não enumerável.

2. *Suponha, para cada $i \in I$, A_i unitário. Então*

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i\}$$

é unitário.

3. *Se $A_i = 1 = \{0\}$ para todo $i \in I$ então*

$$\prod_{i\in I} A_i = 1^I \approx 1.$$

4. Se $A_{i_0} = \emptyset$ para algum $i_0 \in I$ então $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$.

Teorema 15. *Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos não vazios. Se $J \subseteq I$ então*

$$\prod_{j \in J} A_j \preceq \prod_{i \in I} A_i.$$

Demonstração.

$$\prod_{j \in J} A_j = \{f : J \to \bigcup_{j \in J} A_j \mid f(j) \in A_j\}.$$

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i\}.$$

Considere $F : \prod_{j \in J} A_j \to \prod_{i \in I} A_i$ dada por

$$f \in \prod_{j \in J} A_j \mapsto \underbrace{\text{alguma } g \text{ tal que } g|J = f}_{\text{axioma da escolha}}.$$

F é injetora pois se $f, f' \in \prod_{j \in J} A_j$, $f \neq f'$, então $f(j) \neq f'(j)$ para algum $j \in J$. Logo, $F(f) \neq F(f')$ uma vez que $F(f)|J = f$ e $F(f')|J = f'$.

$\therefore \prod_{j \in J} A_j \preceq \prod_{i \in I} A_i.$

□

Teorema 16. *Seja I finito, $I \neq \emptyset$, e suponha A_i enumerável para cada $i \in I$. Então, $\prod_{i \in I} A_i$ é enumerável.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução no número de elementos de I.

Se $I \approx 1$ então

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : \{0\} \to A_0 \mid f(0) \in A_0\} \approx A_0.$$

Hipótese Indutiva: Se $I \approx n$ então $\prod_{i \in I} A_i$ é enumerável.

Tese: Se $I \approx n + 1$ então $\prod_{i \in I} A_i$ é enumerável.

Temos:

$$\prod_{i \in I} A_i \approx \underbrace{\left(\prod_{i \in I - \{i_0\}} A_i\right)}_{\text{enumerável por H.I.}} \times \underbrace{A_{i_0}}_{\text{enumerável por hipótese}} \Longrightarrow \prod_{i \in I} A_i \text{ enumerável.}$$

□

Observação 3. *Observe que se I é infinito e infinitos A_i's têm pelo menos dois elementos então $\prod_{i\in I} A_i$ é não enumerável.*

. . . .

Exercícios:

1. Sejam A um conjunto e $\{B_i\}_{i\in I}$ uma família de conjuntos. Prove que

$$\prod_{i\in I} B_i^A \approx \left(\prod_{i\in I} B_i\right)^A .$$

. . . .

Capítulo 5

Números cardinais e o Axioma da Escolha

Em vários momentos até aqui tivemos a necessidade de selecionar elementos de conjuntos não vazios. Não mais adiemos a discussão sistemática de um tal princípio de seleção. Existem numerosas formulações equivalentes do Axioma da Escolha. Listaremos seis delas no que segue.

Definição 17. *Uma relação é um conjunto de pares ordenados.*

Dada uma relação R, definimos o domínio e a imagem de R por:

$$x \in dom\ R \iff \exists y \mid (x, y) \in R$$

$$x \in im\ R \iff \exists t \mid (t, x) \in R.$$

Teorema 17. *São equivalentes ss seguintes sentenças:*

1. ***Axioma da Escolha, I.*** *Para toda relação R existe uma função $F \subseteq R$ com $dom\ F = dom\ R$.*

2. ***Axioma da Escolha, II.*** *O produto cartesiano de conjuntos não vazios é sempre não vazio. Isto é, se H é uma função com domínio I e se $(\forall\ i \in I)\ H(i) \neq \emptyset$, então existe uma função f com domínio I tal que $(\forall\ i \in I)\ f(i) \in H(i)$.*

3. ***Axioma da Escolha, III.*** *Para todo conjunto A existe uma função F (uma "função escolha" para A) tal que o domínio de F é o conjunto dos subconjuntos não vazios de A, e tal que $F(B) \in B$ para cada subconjunto não vazio $B \subseteq A$.*

4. ***Axioma da Escolha, IV.*** *Seja $\mathcal{A}$ um conjunto tal que* ***(a)*** *cada elemento de $\mathcal{A}$ é um conjunto não vazio, e* ***(b)*** *quaisquer dois elementos distintos de $\mathcal{A}$ são disjuntos. Então, existe um conjunto C contendo exatamente um elemento de cada membro de $\mathcal{A}$, ou seja, para cada $B \in \mathcal{A}$, o conjunto $C \cap B$ é um conjunto unitário $\{x\}$, algum x.*

5. ***Comparabilidade de cardinais.*** *Dados conjuntos C e D, ou $C \preceq D$, ou $D \preceq C$.*

6. ***Lema de Zorn.*** *Seja $\mathcal{A}$ um conjunto tal que para toda cadeia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, tem-se $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$. ($\mathcal{B}$ é chamado uma cadeia se, e só se, para todo C e D em $\mathcal{B}$, ou $C \subseteq D$, ou $D \subseteq C$.) Então, $\mathcal{A}$ possui um elemento M (um "elemento maximal") tal que M não é um subconjunto de qualquer outro conjunto em $\mathcal{A}$.*

Observação 4. *Uma forma comumente posta do Lema de Zorn é a seguinte: Se, em um conjunto não-vazio e parcialmente ordenado, todo subconjunto totalmente ordenado tem uma quota superior, então o conjunto tem um elemento maximal.*

Demonstração do Teorema 17. (1) $\Longrightarrow$ (2): Para provar (2), assuma H uma função com domínio I e tal que $H(i) \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Defina a relação:

$$R = \{(i, x) \mid i \in I \text{ e } x \in H(i)\}.$$

Por (1), existe uma função $F \subseteq R$ com $dom\ F = dom\ R = I$, pois cada $H(i) \neq \emptyset$.

$\therefore (i, F(i)) \in F \subset F \subseteq R$ e, assim, $F(i) \in H(i)$.

$\therefore F : I \to \bigcup\limits_{i \in I} H(i)$ satisfaz $F(i) \in H_i$, $\forall\ i \in I$, ou seja, $F \in \prod\limits_{i \in I} H(i)$.

(2) $\Longrightarrow$ (4): Seja $\mathcal{A}$ um conjunto satisfazendo as condições (a) e (b), ou seja,

$$\begin{cases} (a) & B \neq \emptyset,\ \forall\ B \in \mathcal{A} \\ (b) & B_1, B_2 \in \mathcal{A},\ B_1 \neq B_2 \Longrightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset \end{cases}$$

Seja H a função identidade sobre $\mathcal{A}$; então $(\forall\ B \in \mathcal{A})\ H(B) = B \neq \emptyset$. Logo, por (2), existe uma função f com domínio $\mathcal{A}$ tal que $(\forall\ B \in \mathcal{A})\ f(B) \in H(B) = B$. Seja $C = im\ f$. Então, $\forall\ B \in \mathcal{A}$, $B \cap C = \{f(B)\}$.

(4) $\Longrightarrow$ (3): Dado um conjunto A, defina

$$\mathcal{A} = \{\{B\} \times B \mid B \text{ é um subconjunto não vazio de } A\}.$$

Então, cada membro de $\mathcal{A}$ é não vazio, e quaisquer dois membros distintos são disjuntos (se $(x, y) \in \{B\} \times \{B\} \cap \{B'\} \times B'$ então $x = B = B'$).

Seja C um conjunto (garantido por (4)) cuja interseção com cada membro de $\mathcal{A}$ é um conjunto unitário:

$$C \cap (\{B\} \times B) = \{(B, x)\}, \ (x \in B).$$

A *priori*, pode ser que C contenha elementos que não pertencem a nenhum elemento de $\mathcal{A}$. Podemos descarta-los fazendo $F = C \cap (\bigcup \mathcal{A})$. Afirmamos que F é uma função escolha para A: todo membro de F pertence a algum $\{B\} \times B$ e, portanto, é da forma (B, x) com $x \in B$. Para todo subconjunto não vazio $B \subseteq A$, existe um único x tal que $(B, x) \in F$, pois $F \cap (\{B\} \times B)$ é um conjunto unitário. Claramente, esse x é $F(B)$ e é um membro de B.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Seja R uma relação qualquer. Então (3) nos dá uma função escolha G para *im* R; assim, $G(B) \in B$ para todo subconjunto B não vazio de *im* R. Definimos uma função F com *dom* F = *dom* R por

$$F(x) = G(\{y \mid (x, y) \in R\}).$$

Então $F(x) \in \{y \mid (x, y) \in R\}$, ou seja, $(x, F(x)) \in R$. Portanto, $F \subseteq R$.

Até aqui, provamos o seguinte esquema de implicações:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\ 3 \arrow[u] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Precisamos ainda incluir as partes (5) e (6).

(6) $\Longrightarrow$ (1): A estratégia por de trás dessa aplicação do Lema de Zorn, e também de outras aplicações, é formar uma coleção $\mathcal{A}$ de peças de objetos desejados, e então

mostrar que uma peça maximal serve para os nossos propósitos. No presente caso, nos é dada uma relação R e então definimos

$$\mathcal{A} = \{f \subseteq R \mid f \text{ é função}\}.$$

Antes de aplicar o Lema de Zorn, devemos checar que $\mathcal{A}$ é fechado com respeito a uniões de cadeias. Assim, considere $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ uma cadeia qualquer. Uma vez que todo elemento de $\mathcal{B}$ é um subconjunto de R, $\bigcup \mathcal{B}$ é um subconjunto de R. Para ver que $\bigcup \mathcal{B}$ é uma função, usaremos o fato de que $\mathcal{B}$ é uma cadeia: se (x, y) e (x, z) pertencem a $\bigcup \mathcal{B}$, então

$$(x, y) \in G \in \mathcal{B} \ \text{ e } \ (x, z) \in H \in \mathcal{B}$$

para alguma função G e alguma função H em $\mathcal{A}$. Ou $G \subseteq H$, ou $H \subseteq G$; em ambos os casos, (x, y) e (x, z) pertencem a uma mesma função e, portanto, $y = z$. Logo, $\bigcup \mathcal{B}$ está em $\mathcal{A}$. Agora podemos usar (6) de modo a garantir uma função maximal F em $\mathcal{A}$. Afirmamos que $dom\ F = dom\ R$. Caso contrário, existiria algum $x \in dom\ R - dom\ F$. Como $x \in dom\ R$, existe y tal que $(x, y) \in R$. Defina

$$F' = F \cup \{(x, y)\}.$$

Então $F' \in \mathcal{A}$, contradizendo a maximalidade de F. Portanto, $dom\ F = dom\ R$.

(6) $\implies$ (5): Sejam C e D conjuntos quaisquer; provaremos que $C \preceq D$ ou $D \preceq C$. Para utilizar (6), definimos

$$\mathcal{A} = \{f \mid f \text{ é uma função injetora, } dom\ f \subseteq C \text{ e } im\ f \subseteq D\}.$$

Considere uma cadeia qualquer $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Como anteriormente, $\bigcup \mathcal{B}$ é uma função, e um argumento similar mostra que $\bigcup \mathcal{B}$ é injetora. Seja $(x, y) \in \bigcup \mathcal{B}$ qualquer; então $(x, y) \in f \in \mathcal{A}$. Consequentemente, $x \in C$ e $y \in D$. O que nos mostra que $dom \bigcup \mathcal{B} \subseteq C$ e $im \bigcup \mathcal{B} \subseteq D$. Logo, $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$ e, então, podemos aplicar (6) para obter um elemento maximal $\hat{f} \in \mathcal{A}$. Afirmamos que ou $dom\ \hat{f} = C$, caso em que $C \preceq D$, ou $im\ \hat{f} = D$, caso em que $D \preceq C$ (nesse caso, $\hat{f}^{-1}$ é uma função injetora de D em C). Suponha o contrário, nem $dom\ \hat{f} = C$, nem $im\ \hat{f} = D$. Assim, existem $c \in C - dom\ \hat{f}$ e $d \in D - im\ \hat{f}$. Logo,

$$f' = \hat{f} \cup \{(c, d)\}$$

está em $\mathcal{A}$, contradizendo a maximalidade de $\hat{f}$.

Nesse ponto, temos provado o seguinte esquema de implicações:

$$\begin{tikzcd} & 6 \arrow[r] \arrow[dl] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\ 5 & & 3 \arrow[u] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Nesse momento, ficaremos em débito com o fechamento das equivalências. Pagaremos essa conta mais adiante, depois de provarmos o Teorema da boa-ordenação.

□

Observação 5. *O Lema de Zorn apareceu pela primeira vez em 1922, em um artigo do Kuratowski. A importância do Lema de Zorn reside no fato de que ele é adequado para muitas aplicações na matemática. Por exemplo, em Álgebra Linear, para provar que todo espaço vetorial tem uma base, requer-se alguma forma de escolha, e o Lema de Zorn é uma forma conveniente do Axioma da Escolha para se usar aqui: tomamos* $\mathcal{A}$ *como sendo a coleção de todos os conjuntos linearmente independentes do espaço; então, um elemento maximal será uma base. Similarmente, em Teoria de Anéis quando provamos a existência de um ideal maximal próprio em um anel com identidade, ou em Teoria de Grupos, quando provamos a existência de subgrupos abelianos maximais em um grupo, o Lema de Zorn é a forma adequada do Axioma da Escolha.*

Agora, adicionamos formalmente o Axioma de Escolha à nossa lista de axiomas. Inicialmente, alguns matemáticos objetaram o Axioma da Escolha, porque ele afirma a existência de um conjunto sem especificar exatamente o que ele contém. Nessa medida, é menos "construtivo" do que os outros axiomas. Gradualmente, o axioma ganhou aceitação (pelo menos aceitação pela maioria dos matemáticos dispostos a aceitar a lógica clássica). Mas mantém uma imagem ligeiramente manchada, dos dias em que não era muito respeitável. Consequentemente, tornou-se uma prática amplamente difundida, cada vez que o axioma da escolha é usado, fazer menção explícita do fato. Nenhum gesto desse tipo é estendido aos outros axiomas, que são usados extensivamente e raramente mencionados.

Capítulo 6

A aritmética dos números cardinais

6.1 Soma de números cardinais

Definição 18. *Sejam κ e λ dois cardinais ($\kappa = |A|$ e $\lambda = |B|$). A soma $\kappa + \lambda$ é definida por*

$$\kappa + \lambda = |A \dot{\cup} B|,$$

onde $A \dot{\cup} B$ é a reunião disjunta

$$A \dot{\cup} B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

Exemplo 6. *Sejam n e m cardinais finitos,*

$$\begin{aligned} n &= \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ m &= \{0, 1, \ldots, m-1\} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} n \dot{\cup} m &= \{(0,0), (1,0), \ldots, (n-1,0), (0,1), (1,1), \ldots, (m-1,1)\} \\ &\approx \{(0,0), \ldots, (n-1,0), (n,0), \ldots, (n+m-1,0)\} \\ &\approx n+m. \end{aligned}$$

Exemplo 7. $n + \aleph_0 = \aleph_0$; $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Exemplo 8. *Seja c a cardinalidade do contínuo (ou seja, de $\mathbb{R}$ ou qualquer conjunto equinúmero a $\mathbb{R}$). Então:*

$$\begin{aligned} n + c &= c \\ \aleph_0 + c &= c \\ c + c &= c \end{aligned}$$

Definição 19. *Sejam* $\kappa = |A|$ *e* $\lambda = |B|$. *Então*

$$\kappa \leq \lambda \quad se \quad A \preceq B.$$

Proposição 4 (Propriedades da Soma de Cardinais)**.** *Sejam* κ, λ, μ *cardinais. Então:*

1. *Comutativa:* $\lambda + \kappa = \kappa + \lambda$.

2. *Associativa:* $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$.

3. $\kappa \leq \lambda \Longrightarrow \kappa + \mu \leq \lambda + \mu$.

4. *Não vale a propriedade do cancelamento, isto é,* $\kappa + \mu = \lambda + \mu \not\Longrightarrow \kappa = \lambda$. *Por exemplo, dados naturais* n, m *com* $n \neq m$, *tem-se* $n + \aleph_0 = m + \aleph_0$.

6.2 Produto de números cardinais

Definição 20. *Sejam* $\kappa = |A|$ *e* $\lambda = |B|$. *Então*

$$\kappa \cdot \lambda = |A \times B|.$$

Exemplo 9. *Sejam* n, m *números naturais, ou seja, cardinais finitos. Então:*

$$\underbrace{n \cdot m}_{\text{multiplicação de cardianais}} = \left| \begin{array}{cccc} \{(0,0), & (0,1), & \dots & (0,m-1), \\ (1,0), & (1,1), & \dots & (1,m-1), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1,0), & (n-1,1) & \dots & (n-1,m-1)\} \end{array} \right|$$
$$= |\{0,1,\dots,nm-1\}| = \underbrace{nm}_{\text{produto usual de números naturais}}$$

Exemplo 10. *Seja* n *um número natural. Então:*

$$n \cdot \aleph_0 = |n \times \mathbb{N}| = \left| \begin{array}{cccc} \{(0,0), & (0,1), & \dots & \dots \\ (1,0), & (1,1), & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1,0), & (n-1,1) & \dots & \dots\} \end{array} \right| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Exemplo 11. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ *pois* $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Exemplo 12. *(Mais difícil)* $c \cdot c = c$. *(Carta de Cantor para Dedekind: eu vejo mas não acredito!) A demonstração que Cantor propôs é essencialmente o seguinte: tome um ponto* $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ *e escreva as expansões decimais de* x *e de* y*:*

$$x = 0, r_1 r_2 r_3 \dots \qquad y = 0, s_1 s_2 s_3 \dots.$$

Alguns números reais possuem mais do que uma expansão decimal. Por exemplo,

$$0,1 = 0,1000000\ldots = 0,09999999\ldots.$$

Para evitar ambiguidade, para os números que possuem mais do que uma expansão decimal, tomaremos sempre aquela que termina com infinitos 9's. A ideia de Cantor é, então, mapear (x, y) no ponto $z \in [0,1]$ dado por

$$z = 0, r_1 s_1 r_2 s_2 r_3 s_3 \ldots.$$

Uma vez que podemos recuperar x e y a partir da expansão decimal de z, temos uma correspondência injetora. Cantor, aparentemente, não se dá conta de que, apesar de injetora, não é sobrejetora. Dedekind, ao ler a carta de Cantor, nota imediatamente tal problema: por exemplo, o número

$$z = 0,120101010101\ldots \in [0,1]$$

não corresponde a nenhum par (x, y) por essa função pois, se o fosse, x deveria ser

$$x = 0,1000000000$$

mas a escolha de Cantor para a expansão decimal de x não é essa. Bom, Cantor modifica a função de algum jeito de modo a obter uma bijeção, mas o importante mesmo é que o erro apontado por Dedekind dá um insight a Cantor de que algo mais geral deveria valer. É o que conhecemos hoje como Teorema de Schroeder-Bernstein: se existe uma função injetora $f : A \to B$ e uma função injetora $g : B \to A$, então $A \approx B$. Veja que esse teorema resolve o problema. Um belíssimo artigo sobre esse episódio da Matemática é o artigo do Fernando Q. Gouvêa, "Was Cantor surprised", na revista The American Mathematical Monthly.

Proposição 5 (Propriedades do Produto de Cardinais)**.** *Sejam κ, λ, μ cardinais. Então:*

1. *Comutativa: $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$ (pois $A \times B \approx B \times A$).*
2. *Associativa: $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$ (pois $A \times (B \times C) \approx (A \times B) \times C$).*
3. *$\kappa \leq \lambda \Longrightarrow \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$.*

4. *Não vale a propriedade do cancelamento, ou seja,* $\kappa \cdot \mu = \lambda \cdot \mu \not\Longrightarrow \kappa = \lambda$. *Por exemplo, para* n, m *naturais distintos, tem-se* $n \cdot \aleph_0 = m \cdot \aleph_0$.

5. $1 \cdot \kappa = \kappa$ *(pois* $\{0\} \times A \approx A$*).*

6. $0 \cdot \kappa = 0$ *(pois* $\emptyset \times A = \emptyset$*).*

7. *Distributiva:* $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$ *(pois* $A \times (B \,\dot{\cup}\, C) \approx (A \times B) \,\dot{\cup}\, (A \times C)$*).*

Definição 21. *Seja* $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, $\lambda_i = |A_i|$, *uma família de cardinais tal que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$. *Define-se:*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \overset{def.}{:=} \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|.$$

Proposição 6. $\kappa \cdot \sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{i \in I} \kappa \cdot \lambda_i$.

Demonstração. Basta notar que

$$B \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i).$$

□

Proposição 7. *Se* $\lambda_i = \lambda_j \ \forall \ i, j \in I$, *digamos,* $A_i \approx A \ \forall \ i \in I$, $|A| = \lambda$, *então*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = |I| \cdot \lambda.$$

Demonstração. Note que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \left| \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A) \right| = \left| \left(\bigcup_{i \in I} \{i\} \right) \times A \right| = |I \times A| = |I| \cdot \lambda.$$

□

Corolário 6. *Se* $\lambda_i = \aleph_0$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$, *então*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

6.3 Exponenciação de números cardinais

Definição 22. *Sejam $\kappa = |A|$ e $\lambda = |B|$. Definimos*

$$\kappa^{\lambda} = |A^B| = |\{f : B \to A \mid f \text{ função}\}|.$$

Exemplo 13. *Sejam n e m números naturais. Então,*

$$\underbrace{n^m}_{\text{exponenciação de cardinais}} = |n^m| = \underbrace{n^m}_{\text{exponenciação usual de números}}.$$

Demonstraremos essa relação por indução em m.

$\underline{m = 0}$: $$\underbrace{n^0}_{\text{exponenciação de cardinais}} = |\{f : \emptyset \to n\}| = 1 = \underbrace{n^0}_{\text{exponenciação usual de números}}.$$

<u>H. I.:</u> Suponhamos que existem n^m funções de m em n.

<u>Tese:</u> Há n^{m+1} funções de $m+1$ em n.

Por hipótese indutiva, existem n^m funções de m em n. Para cada uma dessas funções, temos n opções de imagem para $m \in m+1$. Assim, existem $n \cdot n^m = n^{m+1}$ funções de $m+1$ em n.

Teorema 18. $2^{\aleph_0} = c$.

Demonstração. Temos $2^{\aleph_0} = |\{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \mid f \text{ função}\}|$ e $c = |\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Mostraremos que existe um função injetora de $2^{\mathbb{N}}$ em $(0,1)$ e existe uma função injetora de $(0,1)$ em $2^{\mathbb{N}}$, donde, pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder, concluiremos que $2^{\mathbb{N}} \approx (0,1)$, ou seja, $2^{\aleph_0} = c$.

$\underline{(0,1) \preceq 2^{\mathbb{N}}}$: construiremos uma função injetora de $H : (0,1) \to 2^{\mathbb{N}}$. A função será definida usando-se expansão binária dos números reais. Por exemplo, associaremos o número cuja expansão binária é

$$0.1100010\ldots$$

à função em $2^{\mathbb{N}}$ cuja sequência sucessiva de termos é

$$(1,1,0,0,0,1,0,\ldots).$$

Em geral, dado $z \in (0,1)$, seja

$$H(z) : \mathbb{N} \to \{0,1\}$$

a função cujo valor em n é o $(n+1)$-ésimo bit de z (ou seja, o $(n+1)$-ésimo dígito de z na expansão binária). Note que existem números cuja expansão binária não é única:

$$0.1000\ldots = 0.01111\ldots = \frac{1}{2}.$$

Para evitarmos ambiguidade, convencionamos sempre tomar a expansão binária que termina com infinitos 1's para os números que possuem mais do que uma expansão binária. A função H assim definida é claramente injetora.

<u>$2^{\mathbb{N}} \preceq (0,1)$:</u> Defina $F : 2^{\mathbb{N}} \to (0,1)$ por: dada uma função $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ em $2^{\mathbb{N}}$, defina $F(g) \in (0,1)$ como sendo o número r cuja expansão decimal é

$$r = 0, r_1 r_2 \ldots,$$

onde $r_i = g(i)$.

□

Teorema 19. *Sejam $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ e $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ famílias de cardinais tal que $\kappa_i \leq \lambda_i$, $\forall i$. Então,*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i \quad e \quad \prod_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i$$

Demonstração. Sejam $\kappa_i = |A_i|$, $\lambda_i = |B_i|$ e tal que $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$.

<u>Primeira parte:</u> Como $\kappa_i \leq \lambda_i$, existe $f_i : A_i \to B_i$ injetora, para cada $i \in I$. Considere

$$F : \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} B_i$$

dada por: para $a_i \in A_i$, $F(a_i) = f_i(a_i) \in B_i$. Como $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, tem-se que F está bem definida. Também, a injetividade das f_i's e o fato de $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ nos garante que F é injetora.

$\therefore \sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i.$

Segunda parte: Agora, queremos uma função injetora $G : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$. Utilizando as funções injetoras $f_i : A_i \to B_i$, faremos o seguinte: dada $g \in \prod_{i\in I} A_i$, ou seja,

$$g : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, \quad \text{tal que} \quad g(i) \in A_i, \quad \text{para todo} \quad i \in I,$$

definimos $G(g) \in \prod_{i\in I} B_i$ pelo seguinte

$$G(g) : I \to \bigcup_{i\in I} B_i$$

onde

$$G(g)(i) = f_i(g(i)) \in B_i.$$

G é injetora:

$$\begin{aligned} G(g_1) = G(g_2) \quad &\Longrightarrow \quad G(g_1)(i) = G(g_2)(i), \ \forall\ i \in I \\ &\Longrightarrow \quad f_i(g_1(i)) = f_i(g_2(i)), \ \forall\ i \in I \\ &\overset{f_i \text{ é injetora}}{\Longrightarrow} \quad g_1(i) = g_2(i), \ \forall\ i \in I \\ &\Longrightarrow \quad g_1 = g_2. \end{aligned}$$

$\therefore \prod_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i.$ □

Proposição 8 (Propriedades da Exponenciação)**.** *Sejam κ, μ e λ cardinais quaisquer. Então:*

1. *$\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$. (Ver exercício 3, página 32).*

2. *(Generalização) Dada uma família $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de cardinais,*

$$\prod_{i\in I} \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{(\sum_{i\in I} \lambda_i)}.$$

3. *$\kappa^\lambda \cdot \mu^\lambda = (\kappa \cdot \mu)^\lambda$. (Ver exercício 1, página 36).*

4. *(Generalização) Dada uma família $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ de cardinais,*

$$\prod_{i\in I} \kappa_i^\lambda = \left(\prod_{i\in I} \kappa_i\right)^\lambda.$$

(Ver exercício 1, página 36).

5. $(\kappa^\mu)^\lambda = \kappa^{\mu\cdot\lambda}$. *(Ver exercício 4, página 36).*

6. $\kappa \leq \mu \Longrightarrow \kappa^\lambda \leq \mu^\lambda$.

7. $\lambda \leq \mu \Longrightarrow \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$, *desde que* $\kappa \neq 0$.

Demonstração. 6. Sejam $\kappa = |A|$, $\mu = |B|$ e $\lambda = |C|$. Supondo a existência de uma função injetora $f : A \to B$, queremos provar a existência de uma função injetora $F : A^C \to B^C$. Veja que

$$A^C = \{\alpha : C \to A \mid \alpha \text{ função}\}$$

e

$$B^C = \{\beta : C \to B \mid \beta \text{ função}\}.$$

Uma maneira "natural" de definir F é:

$$\alpha \in A^C \mapsto F(\alpha) = f \circ \alpha.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
C \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "F(\alpha)=f\circ\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>F é injetora:</u> Suponha $F(\alpha_1) = F(\alpha_2)$, ou seja, $f\circ\alpha_1 = f\circ\alpha_2$. Então, $f(\alpha_1(x)) = f(\alpha_2(x))$, para todo $x \in C$. Como f é injetora, conclui-se que $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$, para todo $x \in C$, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2$.

$\therefore \kappa^\lambda \leq \mu^\lambda$.

7. Sejam $\kappa = |A|$, $\mu = |B|$ e $\lambda = |C|$, com $A \neq \emptyset$. Supondo $f : C \to B$ uma função injetora, queremos mostrar a existência de uma função injetora $F : A^C \to A^B$. Como $A \neq \emptyset$, fixe $a_0 \in A$ e defina $F : A^C \to A^B$ por

$$\alpha \in A^C \mapsto F(\alpha) \in A^B$$

onde $F(\alpha) : B \to A$ é dada por

$$F(\alpha)(b) = \begin{cases} \alpha(c), & \text{se } b = f(c) \\ a_0, & \text{se } b \notin im(f) \end{cases}$$

$\underline{F \text{ é injetora:}}$ Suponha $F(\alpha_1) = F(\alpha_2)$. Então, $F(\alpha_1)(b) = F(\alpha_2)(b)$, para todo $b \in im(f)$, concluindo-se que $\alpha_1(c) = \alpha_2(c)$, para todo $c \in C$, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2$.

$\therefore \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.

$\square$

. . . .

Exercícios

1. Mostre que $\aleph_0^n = \aleph_0$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2. Mostre que $m^n < \aleph_0$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

3. Mostre que $c^n = c$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

4. Mostre que
$$2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = {\aleph_0}^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Seja $f = |\mathbb{R}^\mathbb{R}|$. Mostre que
$$2^c = n^c = {\aleph_0}^c = c^c = f$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

6. Considere o conjunto $K = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$. Mostre que $|K| = c$.

7. Mostre que $f \cdot f = f$.

8. Mostre que $f^n = f$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

9. Mostre que $f^{\aleph_0} = f$.

10. Mostre que $f^c = f$.

11. Mostre que $f < f^f$.

. . . .

6.4 Não existe nenhum conjunto contendo todos os cardinais

Teorema 20. *Seja $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ uma família de cardinais na qual não existe elemento máximo. Então, para todo $j \in I$,*

$$\kappa_j < \sum_{i\in I} \kappa_i.$$

Demonstração. Dado um índice $i_0 \in I$ qualquer, considere a família $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ tal que $\lambda_{i_0} = \kappa_{i_0}$ e $\lambda_i = 0$ para $i \neq i_0$. Obviamente, $\lambda_i \leq \kappa_i$, $\forall\ i \in I$. Segue do Teorema 19 que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \leq \sum_{i\in I} \kappa_i,$$

ou seja,

$$\kappa_{i_0} \leq \sum_{i\in I} \kappa_i$$

qualquer que seja $i_0 \in I$.

Resta provarmos que a desigualdade é estrita. Suponha, por contradição, que para algum $\bar{i} \in I$ valha

$$\kappa_{\bar{i}} = \sum_{i\in I} \kappa_i.$$

Pelo que vimos,

$$\kappa_{i_0} \leq \sum_{i\in I} \kappa_i = \kappa_{\bar{i}}, \quad \text{para todo} \quad i_0 \in I,$$

o que nos dá que $\kappa_{\bar{i}}$ é elemento máximo, uma contradição!.

Logo, $\kappa_j < \sum_{i\in I} \kappa_i$, para todo $j \in I$. □

Corolário 7. *Dada uma família qualquer de cardinais, $\{\kappa_i\}_{i\in I}$, existe um cardinal κ tal que $\kappa > \kappa_i$, $\forall\ i \in I$.*

Demonstração. <u>1o. caso:</u> $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ tem um maior elemento κ_{i_0}. Nesse caso, basta tomar $\kappa = 2^{\kappa_{i_0}}$.

<u>2o. caso:</u> $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ não tem um maior elemento. Pelo teorema anterior, $\kappa = \sum_{i\in I} \kappa_i > \kappa_j$, $\forall\ j \in I$.

□

Corolário 8. *Não existe um conjunto contendo todos os números cardinais.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista um conjunto contendo todos os números cardinais. Então,

$$C = \{k \mid k \text{ é cardinal}\}$$

é também um conjunto. Pelo resultado acima, existe um cardinal λ tal que

$$\kappa < \lambda,$$

para todo $\kappa \in C$. Mas $\lambda \in C$ (pois é cardinal). Logo,

$$\lambda < \lambda,$$

contradição!

Portanto, não existe nenhum conjunto contendo todos os números cardinais.

□

Teorema 21 (Teorema de König)**.** *Sejam $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ e $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ famílias de cardinais tal que $\kappa_i < \lambda_i$, $\forall\ i \in I$. Então,*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Demonstração. Sejam $\kappa_i = |A_i|$, $\lambda_i = |B_i|$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $j \neq i$.

Por hipótese, para cada $i \in I$, existe $f_i : A_i \to B_i$ injetora, mas não existe função sobrejetora de A_i em B_i.

Assim, para cada $i \in I$, escolha $b_i \in B_i$ tal que $b_i \in B_i - f_i(A_i)$.

Defina $F : \bigcup_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$ por

$$a \in A_i \mapsto F(a) : I \to \bigcup_{i\in I} B_i$$

onde

$$F(a)(j) = \begin{cases} f_i(a), & \text{se } j = i \\ b_j, & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

<u>F é injetora:</u> Sejam $a, a' \in A_i$ com $a \neq a'$. Como f_i é injetora, $f_i(a) \neq f_i(a')$ e, portanto, $F(a)(i) \neq F(a')(i)$, acarretando que $F(a) \neq F(a')$.

Agora, sejam $a \in A_i$ e $a' \in A_j$, com $j \neq i$. Como $A_i \cap A_j = \emptyset$, $a \neq a'$. Devemos mostrar que $F(a) \neq F(a')$. Isto de fato ocorre pois $F(a)(i) = f_i(a)$ e $F(a')(i) = b_i \in B_i - f_i(A_i)$, ou seja, $F(a)(i) = f_i(a) \neq b_i = F(a')(i)$.

$\therefore F$ é injetora.

Devemos ainda mostrar que não existe função sobrejetora de $\bigcup_{i \in I} A_i$ em $\prod_{i \in I} B_i$. Suponha, por contradição, uma função $g : \bigcup_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$ sobrejetora. Para cada $i \in I$, considere $C_i = \{g(a)(i) \mid a \in A_i\} \subset B_i$. Temos que $C_i \neq B_i$ pois, do contrário, a aplicação

$$A_i \to B_i$$

$$a \in A_i \mapsto g(a)(i)$$

seria sobrejetora, contrariando a hipótese de que $\kappa_i < \lambda_i$. Assim, para cada $i \in I$, existe $b_i \in B_i$ tal que $g(a)(i) \neq b_i$, para todo $a \in A_i$. Considere, então, $f : I \to \bigcup_{i \in I} B_i \in \prod_{i \in I} B_i$ dada por

$$f(i) = b_i.$$

Como estamos supondo g sobrejetora, existe $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, ou seja, $a \in A_j$, para algum $j \in I$, tal que

$$f = g(a).$$

Consequentemente,

$$b_j = f(j) = g(a)(j),$$

uma contradição pois b_j foi escolhido justamente não tendo a propriedade de ser $g(a)(j)$ para algum $a \in A_j$.

Logo, não existe aplicação sobrejetora de $\bigcup_{i \in I} A_i$ em $\prod_{i \in I} B_i$.

Portanto, $\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$. □

Capítulo 7

Números ordinais

No capítulo 1, discutimos a existência de números de duas naturezas: os números cardinais, que devem medir quantidade, e os números ordinais, que devem medir posição.

Relembre-se que para definirmos os ordinais, dividimos as boas-ordens em classes, onde:

- Uma relação $\leq$ em um conjunto A é uma **boa-ordem** se:

    1. $a \leq a$ para todo $a \in A$ (reflexibilidade).
    2. $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$ para todo a, b, c de A (transitividade).
    3. $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$ para todo a, b de A (anti-simetria).
    4. Para todo $S \subseteq A$ tal que $S \neq \emptyset$, existe $x_0 \in S$ tal que $x_0 \leq x$, para todo $x \in S$ (qualquer parte dela que contém algum elemento contém um mínimo).

- (Definição 5, Capítulo 1) Sejam $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ boas ordens.

  $$A \sim B \Longleftrightarrow \exists\ f : A \to B,\ f \text{ bijeção, tal que } a \leq_A b \Longrightarrow f(a) \leq_B f(b).$$

  Nessas condições, dizemos que A e B são **do mesmo tipo de ordem.**

- Dadas as definições acima, provamos que a relação acima divide os conjuntos bem ordenados em classes de equivalência e, então, colocamos a Definição 6: Seja $(A, \leq)$ um conjunto bem ordenado. Definimos o **tipo ordinal** (tipo de ordem) ou **número ordinal** de A como sendo qualquer conjunto B tal que $B \sim A$.

  Notação: $\bar{A}$ **ou t.o.** A.

Continuamos agora com o seguinte.

7.1 Soma de ordinais

Definição 23. *Seja α um ordinal. Seja $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$ com a ordem de α estendida de modo que $\beta < \alpha$, para todo $\beta \in \alpha$. Dizemos que α' é o sucessor de α.*

Exemplo 14.

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 0' &= 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = \{0\} = 1 \\ n' &= n \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n-1\} \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n-1, n\} = n+1 \\ \omega' &= \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, \dots\} \cup \{\omega\} = \{0, 1, \dots, \omega\} = \omega + 1 \end{aligned}$$

Definição 24. *Sejam α e β ordinais. Considere $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ ordenado da seguinte forma:*

$$(a, i) \leq (b, j) \quad \text{se} \quad i = 0 \text{ e } j = 1, \text{ ou}$$
$$\text{se} \quad i = j \text{ e } a \leq b.$$

Essa é uma boa ordem em $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$. Então, com essa boa ordem $(\leq)$, definimos

$$\alpha + \beta = \langle (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}), \leq \rangle.$$

Exemplo 15. $\omega + 1 = \omega'$*:*

$$\omega + 1 : \underbrace{(0,0) \leq (1,0) \leq (2,0) \leq \cdots \leq (0,1)}_{\text{mesmo tipo de ordem que } \omega'}.$$

$1 + \omega = \omega$*:*

$$1 + \omega : \underbrace{(0,0) \leq (0,1) \leq (1,1) \leq (2,1) \leq \cdots}_{\text{mesmo tipo de ordem que } \omega}.$$

Portanto, ***a soma de ordinais não é comutativa****.*

7.2 Multiplicação de ordinais

Definição 25. *Sejam α e β ordinais. Considere $\alpha \times \beta$ com a seguinte ordem:*

$$(a,b) \leq (c,d) \Longleftrightarrow b <_\beta d \text{ ou } b = d \text{ e } a <_\alpha c.$$

$(\leq)$ é uma boa ordem em $\alpha \times \beta$.

Definimos $\alpha \cdot \beta = \langle \alpha \times \beta, \leq \rangle$.

Exemplo 16. $n \cdot m =$*?*

$$\begin{aligned} n &= \{0,1,\ldots,n-1\} \\ m &= \{0,1,\ldots,m-1\} \end{aligned}$$

$$n \cdot m = \begin{matrix} \{(0,0) \leq & (1,0) \leq & \ldots \leq & (n-1,0) \leq \\ (0,1) \leq & (1,1) \leq & \ldots \leq & (n-1,1) \leq \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0,m-1) \leq & (1,m-1) \leq & \ldots \leq & (n-1,m-1)\} \end{matrix}$$

Em termos de ordem, é o mesmo tipo de ordem de $nm = \{0,1,\ldots,nm-1\}$.

$2 \cdot \omega =$*?*

$$2 \times \omega = \{(0,0) \leq (1,0) \leq (0,1) \leq (1,1) \leq (0,2) \leq (1,2) \leq \cdots\}$$

Em termos de ordem, é o mesmo tipo de ordem de ω.

Portanto, $2 \cdot \omega = \omega$.

Vejamos agora $\omega \cdot 2$:

$$\omega \times 2 = \{(0,0) \leq (1,0) \leq (2,0) \leq \cdots \leq (0,1) \leq (1,1) \leq (2,1) \leq \cdots\}$$

Em termos de ordem, é o mesmo tipo de ordem de $\omega + \omega$.

Portanto, $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

Vemos, assim, que $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$ e, portanto, a multiplicação de números ordinais não é comutativa.

. . . .

Exercício:

Prove que, para todo número natural n, $n \neq 0$,

$$n \cdot \omega = \omega.$$

. . . .

Observação 6. *Nem sempre vale* $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$*:*

$$(2 + 3)\omega = 5\omega = \omega \neq 2\omega + 3\omega = \omega + \omega.$$

7.3 Restringindo ordinais a determinados conjuntos bem ordenados

Será extremamente útil em nossa discussão sobre boas ordens se pudermos atribuir um "número" a cada estrutura bem ordenada de modo que esse "meça o seu comprimento". Duas boas ordens devem receber o mesmo número se são isomorfas, ou seja, se existir entre elas uma bijeção que preserve ordem. A situação é muito parecida com a nossa discussão sobre números cardinais, onde dividimos os conjuntos segundo a relação de equipotência e em cada classe gostaríamos de tomar um representante de modo que esse seria o cardinal que determina essa classe. Seguimos com a seguinte redefinição:

Definição 26. *Um conjunto* α *é um ordinal se:*

1. α *é transitivo (isto é,* $a \in b \in \alpha \Longrightarrow a \in \alpha$*).*

2. α *é bem ordenado pela relação de pertinência* $(\in)$ *(*$\forall\ a, b \in \alpha,\ a \leq b \Longleftrightarrow a = b$ *ou* $a \in b$*).*

Teorema 22. *Todo número natural é um ordinal.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução em n.

0 é um ordinal por vacuidade.

Tomemos, por hipótese de indução, que n é um ordinal (segundo a Definição 26) e mostremos que $n+1 = n \cup \{n\}$ é um ordinal:

1. Sejam $a \in b \in n+1$ e devemos provar que $a \in n+1$. Se $b \in n$, como n é ordinal, $a \in n$ e, portanto, $a \in n \cup \{n\} = n+1$. Outro caso é quando $b = n$. Nesse caso, $a \in n \subset n+1$ e, assim, $a \in n+1$.

2. Pela própria construção de $n+1$, temos que a relação de pertinência nos dá uma boa-ordenação em $n+1$, sendo
$$0 \in 1 \in 2 \in \cdots \in n.$$

Portanto, $n+1$ é um ordinal.

Logo, todo número natural é um ordinal. □

Observação 7. *De modo geral, se α é um ordinal então $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$ é um ordinal.*

Proposição 9. *Se α é ordinal e $\beta \in \alpha$ então $\beta \subset \alpha$.*

Demonstração. Seja α um ordinal e seja $\beta \in \alpha$. Seja $a \in \beta$ qualquer. Como α é ordinal, α é transitivo. Logo,
$$a \in \beta \in \alpha \Longrightarrow a \in \alpha.$$

Logo, $\beta \subset \alpha$.

□

Teorema 23. *Se α é ordinal e $\beta \in \alpha$ então β é ordinal.*

Demonstração. Sejam α um ordinal e $\beta \in \alpha$. Então:

1. <u>β é transitivo:</u> sejam $a \in b \in \beta$ quaisquer. Como α é transitivo, conclui-se que $b \in \alpha$. Aplicando agora a transitividade de α a $a \in b \in \alpha$, conclui-se que $a \in \alpha$. Assim, a, b e β são elementos de α e satisfazem $a \in b \in \beta$. Como α é bem ordenado pela relação de pertinência, segue que $a \in \beta$.

   Portanto, β é transitivo.

2. β é bem ordenado pela relação $\in$ pois $\beta \subset \alpha$ e α o é.

Portanto, β é ordinal. $\square$

Vimos que se α é um ordinal então $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$ é também um ordinal. Na verdade, α' **é o menor ordinal maior do que** α, ou seja, se β é um ordinal tal que $\alpha \in \beta$ então $\beta = \alpha'$ ou $\alpha' \in \beta$. É o que demonstraremos abaixo.

Proposição 10. *Seja α um ordinal. Então α' é o menor ordinal maior do que α no sentido de que se β é um ordinal tal que $\alpha \in \beta$ então $\beta = \alpha'$ ou $\alpha' \in \beta$.*

Demonstração. Seja β um ordinal tal que $\alpha \in \beta$. Pela Proposição 9, $\alpha \subset \beta$. Portanto, $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta$. Nesse caso, se $\alpha' = \beta$, acabou! Caso contrário, temos que $\alpha' \subset \beta$, mas também existe $t \in \beta$ tal que $t \notin \alpha'$, ou seja, $t \neq \alpha$ e $t \notin \alpha$. Como α e t são elementos de β, o qual é ordinal, uma das seguintes possibilidades acontece:

$$\alpha = t, \quad \text{ou} \quad \alpha \in t, \quad \text{ou} \quad t \in \alpha.$$

Dado que $t \neq \alpha$ e $t \notin \alpha$, necessariamente $\alpha \in t$. Logo,

$$S = \{b \in \beta \mid \alpha \in b\}$$

é um subconjunto não vazio de β e, portanto, possui menor elemento, digamos, t_0. Afirmação: $t_0 = \alpha'$. De fato, a situação é que $\alpha \in t_0$, t_0 é ordinal (Teorema 23), consequentemente $\alpha' \subset t_0$ e, analogamente ao que fizemos com β, se $\alpha' \neq t_0$, existiria $t \in t_0$ tal que $\alpha \in t$, mas t_0 é o menor elemento de β que é maior do que α, uma contradição. Portanto, $t_0 = \alpha'$ e, assim, $\alpha' \in \beta$.

$\square$

Definição 27. *Sejam α um ordinal e $A \subseteq \alpha$. A é chamado de um* ***segmento inicial*** *de α se existe $\beta \in \alpha$ tal que*

$$A = \{a \in \alpha \mid a \in \beta\}.$$

Proposição 11. *Todo segmento inicial de um ordinal é um ordinal.*

Demonstração. Se α é ordinal e $\beta \in \alpha$, já vimos que β é ordinal. Se $A = \{a \in \alpha \mid a \in \beta\}$, como $\beta \subset \alpha$, $A = \beta$. Logo, A é ordinal. $\square$

Proposição 12. *Seja α um ordinal. Os únicos segmentos iniciais de α são os elementos de α.*

Demonstração. Segue da demonstração da proposição anterior. □

Abaixo, provamos que o primeiro elemento de qualquer ordinal não vazio é o 0.

Teorema 24. *Seja α um ordinal diferente de* 0. *Então, o menor elemento de α é o* 0.

Demonstração. $\alpha \neq 0$ significa $\alpha \neq \emptyset$. Seja a_0 o menor elemento de α. Queremos provar que $a_0 = 0$, ou seja, que $a_0 = \emptyset$. Suponha, por contradição, que $a_0 \neq \emptyset$ e seja, assim, $t \in a_0$. Como α é transitivo, segue que $t \in \alpha$, contradizendo que a_0 é o menor elemento de α.

Portanto, o menor elemento de qualquer ordinal não nulo é o 0. □

Proposição 13. *Sejam α e β ordinais e suponha $f : \alpha \to \beta$ uma bijeção que preserva ordem. Então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Se $\alpha = 0 = \emptyset$ então é claro que $\beta = 0 = \emptyset$.

Suponha $\alpha \neq 0$. Então, também $\beta \neq 0$ e, assim, pelo teorema anterior, $0 \in \alpha$, $0 \in \beta$ e, como f preserva ordem, $f(0) = 0$.

Agora, seja $t \in \alpha$ e suponha que $a = f(a)$ para todo $a \in t$. Mostremos que $t = f(t)$: Seja $a \in t$ qualquer. Então, $a = f(a) \in f(t)$ (pois f preserva ordem). Logo, $t \subset f(t)$. Reciprocamente, seja $b \in f(t)$ qualquer. Como β é transitivo, $b \in \beta$. Como f é bijeção, existe $a \in \alpha$ tal que $f(a) = b$, e como f preserva ordem, $a \in t$. Logo, $b = f(a) = a \in t$. Portanto, $f(t) = t$ se $f(a) = a$ para todo $a \in t$.

Como consequência, temos que, para todo $t \in \alpha$, $t = f(t)$: suponha, por contradição, $f(t) \neq t$ para algum $t \in \alpha$ e seja, então, $t_0 \in \alpha$ o menor elemento com essa propriedade. Como $f(0) = 0$, $t_0 \neq \emptyset$. Então, para todo $t \in t_0$, $f(t) = t$. Mas isso, pelo acima exposto, implica que $f(t_0) = t_0$, uma contradição!

Portanto, $f(t) = t$ para todo $t \in \alpha$, donde concluímos que $\alpha = \beta$, uma vez que f é bijeção. □

Para continuarmos a nossa discussão sobre ordinais, mostraremos que essa classe de conjuntos satisfaz a tricotomia.

Teorema 25. *Dados ordinais α e β, tem-se uma, e somente uma, das seguintes condições satisfeita:*

$$\alpha = \beta, \quad ou \ \ \alpha \in \beta, \quad ou \ \ \beta \in \alpha.$$

Demonstração. A ideia é parear os elementos de α com os de β da maneira mais natural: o primeiro elemento de α com o primeiro elemento de β, o segundo elemento de α com o segundo elemento de β, e assim por diante. Eventualmente, acabam os elementos de um lado ou do outro. Se exaurimos todos os elementos de α e β simultaneamente, é a situação em que $\alpha = \beta$. Caso contrário, um conjunto será exaurido antes do outro e, então, teremos as situação $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$.

Esse pareamente entre α e β será feito por indução transfinita. Seja e algum elemento que não está nem em α e nem em β. Por indução transfinita, existe uma única função

$$F : \alpha \to \beta \cup \{e\}$$

tal que para todo $t \in \alpha$ tem-se

$$F(t) = \begin{cases} \text{o menor elemento de } \beta - \{f(a) \mid a \in t\}, & \text{se existir} \\ e, & \text{c.c.} \end{cases}$$

<u>Caso 1:</u> $e \in im(F)$. Seja $a \in \alpha$ o menor elemento de α tal que $F(a) = e$. Nesse caso, afirmamos que $F|_a : a \to \beta$ é uma bijeção que preserva ordem e, então, pela Proposição 13, $a = \beta$, donde $\beta \in \alpha$.
<u>Caso 2:</u> $im(F) = \beta$. Nesse caso, $F : \alpha \to \beta$ é uma bijeção que preserva ordem. Pela Proposição 13, $\alpha = \beta$.
<u>Caso 3:</u> $im(F)$ é um subconjunto próprio de β. Seja b o menor elemento de $\beta - im(F)$. Afirmamos que $im(F) = b$ e, assim, $F : \alpha \to b$ é uma bijeção que preserva ordem, donde, pela Proposição 13, conclui-se que $\alpha = b \in \beta$.

□

Definição 28. *Um ordinal α diferente de zero é um* ***ordinal limite*** *quando não é sucessor, isto é, não existe ordinal $\beta \in \alpha$ tal que $\alpha = \beta'$.*

Exemplo 17. *ω é um ordinal limite.*

. . . .

Exercícios:

1. Se α é um ordinal limite então $\omega \subseteq \alpha$ (isto é, ω é o menor ordinal limite).

2. Se α é um ordinal limite e $\alpha \neq \omega$ então $\omega' \subseteq \alpha$.

3. Seja α um ordinal limite tal que $\alpha \neq \omega$. Então $\omega \in \alpha$.

. . . .

Proposição 14. *Seja $\mathcal{O}$ um conjunto qualquer de ordinais. Seja*

$$\alpha = \bigcup \mathcal{O} = \{a \mid \exists\, \beta \in \mathcal{O} \ : \ a \in \beta\}.$$

Então α é um ordinal. Na verdade, α é o menor ordinal maior ou igual a qualquer elemento de $\mathcal{O}$.

Demonstração. Primeiramente, provemos que α é ordinal:
<u>(i) α é transitivo:</u> Sejam $a \in b \in \alpha$. Como $b \in \alpha$, existe $\beta \in \mathcal{O}$ tal que $b \in \beta$. Assim, $a \in b \in \beta$. Como β é transitivo, $a \in \beta$ e, portanto, $a \in \alpha$.

<u>(ii) α é bem ordenado por $\in$:</u>

- $a \notin a, \ \forall\, a \in \alpha$.

- Sejam $a, b, c \in \alpha$ tais que $a \in b \in c$. Como $c \in \alpha$, existe $\beta \in \mathcal{O}$ tal que $c \in \beta$. Como β é transitivo, $b \in \beta$ e, por conseguinte, tendo $a \in b \in \beta$, a transitividade de β nos garante que $a \in \beta$. Assim, a, b e c são elementos de β. Como β é bem-ordenado por $\in$, segue que $a \in c$.

- Resta provarmos que toda parte não vazia de α possui elemento mínimo. Seja $A \subseteq \alpha$, $A \neq \emptyset$. Seja $\beta \in A$ qualquer e considere

$$S = \{\gamma \in A \mid \gamma \in \beta\}.$$

Se $S = \emptyset$, dado o Teorema 25 (tricotomia para ordinais), significa que β é o menor elemento de A. Se $S \neq \emptyset$, dado que $S \subset \beta$ e β é boa ordem, seja $\gamma \in S$ o menor elemento de S. Afirmamos que γ é o menor elemento de A. De fato, se existir $\zeta \in A$ tal que $\zeta \in \gamma$, teríamos $\zeta \in \gamma \in \beta$ implicando em $\zeta \in \beta$, donde seguiria que γ não é o menor elemento de S, uma contradição. Portanto, γ é o menor elemento de A. Provamos, assim, que toda parte não vazia de α possui menor elemento.

$\therefore$ α é um ordinal.

Agora provemos que, para todo $\beta \in \mathcal{O}$, $\beta \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$. Como já provamos a tricotomia para os ordinais, devemos apenas mostrar que não é possível ocorrer $\alpha \in \beta$ quando $\beta \in \mathcal{O}$. Dado $\beta \in \mathcal{O}$, como $\alpha = \bigcup \mathcal{O}$, $\beta \subseteq \alpha$. Se $\beta = \alpha$, acabou! Caso contrário, existe $\gamma \in \alpha$ tal que $\gamma \notin \beta$ e, assim, da tricotomia, $\beta = \gamma$ ou $\beta \in \gamma$. Se $\beta = \gamma$, acabou! Se $\beta \in \gamma \in \alpha$, da transitividade de α, $\beta \in \alpha$ e, assim, acabou!

Para finalizar, queremos provar que se γ é um ordinal tal que para todo $\beta \in \mathcal{O}$ tem-se $\beta \in \gamma$ ou $\beta = \gamma$, então $\alpha \in \gamma$ ou $\alpha = \gamma$. A condição $\beta \in \gamma$ ou $\beta = \gamma$ para todo $\beta \in \mathcal{O}$ implica que

$$\alpha = \bigcup \mathcal{O} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{O}} \beta \subseteq \gamma.$$

Se $\alpha = \gamma$, acabou! Caso contrário, existe $\zeta \in \gamma$ tal que $\zeta \notin \alpha$. Então, $\zeta = \alpha$ ou $\alpha \in \zeta$, os dois casos resultando em $\alpha \in \gamma$.

$\square$

Conclusão: Dado um conjunto $\mathcal{O}$ constituído somente por ordinais,

$$\alpha = \bigcup_{\beta \in \mathcal{O}} \beta$$

é o menor ordinal que é maior ou igual a todos os elementos de $\mathcal{O}$.

Observação 8. *Em particular, se α é um ordinal, α é um conjunto de ordinais e, portanto,*

$$\bigcup \alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

é um ordinal.

Em termos de reunião, os ordinais limites podem ser caracterizados pelo seguinte:

Teorema 26 (Teorema de G. Modolo). *α é um ordinal limite se, e somente se,*

$$\bigcup \alpha = \alpha.$$

Demonstração. Como $\beta \subset \alpha$ sempre que $\beta \in \alpha$ (pois α é ordinal), sempre temos válida a inclusão

$$\bigcup \alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \subseteq \alpha.$$

Assim, devemos provar que

$$\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

se, e somente se, α é ordinal limite.

Suponha α um ordinal limite. Dado $a \in \alpha$ qualquer, como α é ordinal limite, temos $a + 1 \in \alpha$. E, assim,

$$a \in a + 1 \subset \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta.$$

Reciprocamente, supondo

$$\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta,$$

dado $a \in \alpha$ qualquer, existe $\beta \in \alpha$ tal que $a \in \beta$. Logo, $\beta = a + 1$ ou $a + 1 \in \beta$. Em qualquer caso, $a + 1 \in \alpha$, garantindo que α é ordinal limite pois, caso fosse sucessor, teríamos $\alpha = a + 1$, para algum $a \in \alpha$, uma contradição!

Portanto, temos a caracterização:

α é um ordinal limite se, e somente se,

$$\bigcup \alpha = \alpha.$$

□

. . . .

Exercícios:

1. Na demonstração da Proposição 14, mostramos, em particular, que se A é um conjunto de ordinais, $A \neq \emptyset$, então A possui um menor ordinal. Prove que esse menor ordinal é nada mais, nada menos, do que

$$\beta = \bigcap_{\gamma \in A} \gamma.$$

2. Seja $\mathcal{O}$ um conjunto de ordinais que é transitivo. Prove que $\mathcal{O}$ é um ordinal.

. . . .

Teorema 27 (Teorema de Burali-Forti)**.** *Não existe um conjunto que contenha todos os ordinais. Consequentemente, não existe o conjunto dos números ordinais.*

Demonstração. Suponhamos que exista o conjunto de todos os ordinais, denotado por $\mathcal{O}$. Mostremos que $\mathcal{O}$ é ordinal:

(i) $\mathcal{O}$ é transitivo: Sejam $\alpha \in \beta \in \mathcal{O}$. Então β é um ordinal e, consequentemente, α também é um ordinal pois todo elemento de um ordinal é um ordinal (veja Teorema 23). Ou seja, $\alpha \in \mathcal{O}$.

(ii) $\mathcal{O}$ é bem ordenado por $\in$:

a) $\in$ é não reflexiva;

b) $\in$ é uma relação transitiva sobre $\mathcal{O}$: Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{O}$ tais que $\alpha \in \beta \in \gamma$. Como γ é ordinal, segue que $\alpha \in \gamma$;

c) Por fim, seja $A \subset \mathcal{O}$, $A \neq \emptyset$. Já provamos que A possui um menor elemento, a saber,

$$\bigcap_{\gamma \in A} \gamma.$$

Conclusão: $\mathcal{O}$ é um ordinal. Segue que $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$ (absurdo!)

Portanto, $\mathcal{O}$ não pode ser um conjunto.

$\square$

O teorema acima é também conhecido como paradoxo de Burali-Forti. Assim como no paradoxo de Russel, ele nos mostra a inconsistência do uso casual de Cantor do princípio da abstração, o qual permitia, por exemplo, falar do "conjunto de todos os ordinais". O teorema foi publicado em 1897 por Burali-Forti, e foi o primeiro dos paradoxos da teoria dos conjuntos a ser publicado ([2]).

Observação 9. *Nossas conclusões mostram que se existe o conjunto de todos os ordinais finitos então existe um (menor) ordinal infinito (ω).*

Analogamente, se existe o conjunto de todos os ordinais infinitos enumeráveis ($\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$), então existe um (menor) ordinal não-enumerável (ω_1), e assim por diante.

Definição 29. *De modo geral, se $(A, \leq)$ é uma boa-ordem e $t \in A$, o conjunto*

$$seg\ t = \{x \in A \mid x < t\}$$

é chamado de ***segmento inicial*** *determinado por t.*

. . . .

Exercício

1. Seja $(A, \leq)$ uma boa-ordem e considere o conjunto

$$B = \{\text{seg } t \mid t \in A\}$$

munido da relação inclusão de conjuntos.

   (a) Mostre que $(B, \subseteq)$ é uma boa-ordem.

   (b) Mostre que existe um isomorfismo de ordem entre $(A, \leq)$ e $(B, \subseteq)$, ou seja, uma bijeção que preserva ordem.

. . . .

Seja $(A, \leq)$ uma boa-ordem. Seja t_0 o menor elemento de A. Então, definiremos $E(t_0)$ como sendo o ordinal

$$E(t_0) = \text{seg } t_0 = 0.$$

Agora, dado $t \in A$, suponha definido o ordinal $E(a)$ tal que $(\text{seg } a, \leq)$ é isomorfo a $E(a)$, para todo $a < t$. Defina $E(t)$ como sendo

$$E(t) = \{E(a) \mid a < t\}.$$

Então:

(i) $E(t)$ é transitivo: Sejam $b \in E(a) \in E(t)$, onde $a < t$. Por hipótese, $E(a)$ e seg a são isomorfos. Logo, existe $s \in A$, $s < a$ tal que $E(s) = b$. De $s < a < t$ segue que $s < t$ e, assim, $E(s) = b \in E(t)$.

(ii) $E(t)$ é ordinal: segue do fato de que todo conjunto de ordinais que é transitivo é um ordinal.

(iii) $E(t)$ é isomorfo a $(\text{seg } t, \leq)$, ou seja, existe, entre eles, uma bijeção que preserva ordem:

$$\text{seg } t \to E(t)$$

$$a \in \text{seg } t \mapsto E(a)$$

é uma bijeção que preserva ordem.

Por fim, tome $\alpha = \{E(t) \mid t \in A\}$.

Teorema 28. *Com a construção acima:*

a) α *é um ordinal.*

b) $E : A \to \alpha$ *dada por*

$$t \mapsto E(t)$$

é uma bijeção que preserva ordem.

Demonstração. a) Para provarmos que α é um ordinal, como α é um conjunto de ordinais, basta provarmos que α é transitivo. Sejam $\beta \in \gamma \in \alpha$ quaisquer. Então, $\gamma = E(a)$, para algum $a \in A$. E, como $\beta \in E(a)$, pela construção de $E(a)$, $\beta = E(b)$, para algum $b \in A$, $b < a$. Portanto, $\beta \in \alpha$.

b) A função E é claramente sobrejetiva. Basta, então, provarmos, que ela preserva ordem, o que ocorre exatamente pela definição de $E(t)$. $\square$

. . . .

Exercícios:

1. Prove que existe no máximo um isomorfismo de ordem entre conjuntos bem-ordenados.

2. Prove que um conjunto bem ordenado não é isomorfo a nenhum de seus segmentos iniciais.

. . . .

7.4 Redefinições

7.4.1 Soma de Ordinais

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + \beta' &= (\alpha + \beta)' \end{aligned}$$

E se β é ordinal limite então

$$\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha + \gamma.$$

Exemplo 18. *Por definição,*

$$\omega + 1 = \omega + 0' = (\omega + 0)' = \omega'.$$

Por outro lado, também por definição,

$$1 + \omega = \bigcup_{n \in \omega} 1 + n = \omega.$$

7.4.2 Multiplicação de ordinais

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \alpha \cdot \beta' &= \alpha \cdot \beta + \alpha \end{aligned}$$

E se β é ordinal limite então

$$\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha \cdot \gamma.$$

Exemplo 19. *Por definição,*

$$\omega \cdot 2 = \omega \cdot 1' = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega.$$

Por outro lado, também por definição,

$$2 \cdot \omega = \bigcup_{n \in \omega} 2 \cdot n = \omega.$$

7.4.3 Exponenciação de Ordinais

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= 1 \\ \alpha^{\beta'} &= \alpha^\beta \cdot \alpha \end{aligned}$$

E se β é ordinal limite então

$$\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha^\gamma.$$

Exemplo 20.

$$2^\omega = \bigcup_{n \in \omega} 2^n = \omega.$$

$$2^{\omega+1} = 2^{\omega'} = 2^\omega \cdot 2 = \omega \cdot 2 = \omega + \omega.$$

$$2^{\omega+\omega} = \bigcup_{\gamma \in \omega+\omega} 2^\gamma = ???$$

Exercício: Prove que

$$2^{\omega+\omega} = \omega \cdot \omega.$$

Teorema 29. *Dados ordinais α, β, γ,*

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

2. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

3. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

4. $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

5. $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$.

Demonstração. Exercício.

□

7.5 Relações funcionais contínuas, monótonas e normais

Definição 30. *Seja t uma relação funcional que a cada ordinal α associa um (único) ordinal t_α. Dizemos que:*

- *t é monótona se:* $\alpha \in \beta \Longrightarrow t_\alpha \in t_\beta$.

- *t é contínua se:* $t_\lambda = \bigcup\{t_\beta \mid \beta \in \lambda\}$ *sempre que λ é ordinal limite.*

- *t é normal se: t é monótona e contínua.*

Exemplo 21. *$t_\alpha = \alpha + 1$ é monótona mas não é contínua. De fato, veja que $t_\alpha = \alpha + 1 = \alpha + 0' = (\alpha + 0)' = \alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$. Pela Proposição 10, se $\alpha \in \beta$ então $\beta = \alpha'$ ou $\alpha' \in \beta$. No caso em que $\beta = \alpha'$, como $\beta \in \beta'$, segue que $\alpha' \in \beta'$. No caso em que $\alpha' \in \beta$, como $\beta \in \beta'$ e β' é transitivo, seque que $\alpha' \in \beta'$. Portanto,*

$$\alpha \in \beta \Longrightarrow \alpha' \in \beta',$$

ou seja, t é monótona.

t não é contínua: ω é um ordinal limite, $t_\omega = \omega + 1$ e $\bigcup\{t_n \mid n \in \omega\} = \bigcup\{n+1 \mid n \in \omega\} = \omega \neq \omega + 1$.

Teorema 30. *Seja t contínua e tal que $t_\alpha \in t_{\alpha+1}$ para todo α. Então t é monótona e, portanto, normal.*

Demonstração. Por hipótese, t é contínua e satisfaz $t_\alpha \in t_{\alpha+1}$ para todo α. Queremos provar que t é monótona, ou seja, que $t_\alpha \in t_\beta$ sempre que $\alpha \in \beta$. Faremos isso por indução em β. Lógico que para $\beta = 0$ a sentença é verdadeira. Suponhamos, então, que

$$\alpha \in \gamma \Longrightarrow t_\alpha \in t_\gamma \quad (\forall\, \gamma \in \beta).$$

Temos dois casos a considerar para β.
Caso 1: β sucessor. Nesse caso, $\beta = \delta + 1 = \delta \cup \{\delta\}$ para algum δ. Por hipótese de indução,

$$\alpha \in \delta \Longrightarrow t_\alpha \in t_\delta.$$

Seja $\alpha \in \beta$ qualquer. Então, $\alpha \in \delta$ ou $\alpha = \delta$. Se $\alpha \in \delta$ então, por hipótese indutiva, $t_\alpha \in t_\delta$. E, por hipótese, $t_\delta \in t_{\delta+1} = t_\beta$. Por transitividade de t_β, $t_\alpha \in t_\beta$. Se $\alpha = \delta$, por hipótese, $t_\alpha = t_\delta \in t_{\delta+1} = t_\beta$.
Caso 2: β é ordinal limite. Nesse caso, como t é suposta contínua,

$$t_\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} t_\gamma.$$

Seja $\alpha \in \beta$ qualquer. Como β é ordinal limite, $\alpha + 1 \in \beta$. Logo, $t_{\alpha+1} \subseteq t_\beta$. Como $t_\alpha \in t_{\alpha+1}$, segue que $t_\alpha \in t_\beta$.

□

Teorema 31. *Se t é normal e S é um conjunto não vazio de ordinais então*

$$t_{\cup S} = \bigcup\{t_\alpha \mid \alpha \in S\}.$$

Demonstração. Se $\bigcup S$ for um ordinal limite, como t é contínua,

$$t_{\bigcup S} = \bigcup_{\beta \in \bigcup S} t_\beta.$$

Assim, nesse caso, queremos provar que

$$\bigcup_{\beta \in \bigcup S} t_\beta = \bigcup_{\alpha \in S} t_\alpha.$$

$\underline{\bigcup_{\beta \in \bigcup S} t_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in S} t_\alpha}$: Seja $a \in \bigcup_{\beta \in \bigcup S} t_\beta$ qualquer. Então $a \in t_\beta$, para algum $\beta \in \bigcup S$. Assim, $a \in t_\beta$, com $\beta \in \alpha$, algum $\alpha \in S$. Como t é monótona, $t_\beta \in t_\alpha$. Da transitividade de t_α, segue que $a \in t_\alpha$. Portanto, $a \in t_\alpha$, para algum $\alpha \in S$.

$$\therefore \bigcup_{\beta \in \bigcup S} t_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in S} t_\alpha.$$

$\underline{\bigcup_{\alpha \in S} t_\alpha \subset \bigcup_{\beta \in \bigcup S} t_\beta}$: Seja $a \in \bigcup_{\alpha \in S} t_\alpha$ qualquer. Então, $a \in t_\alpha$, para algum $\alpha \in S$. Como $\alpha \in S$, segue que $\alpha \subset \bigcup S$ e, consequentemente, $\alpha = \bigcup S$ ou $\alpha \in \bigcup S$. Caso $\alpha \in \bigcup S$, segue que

$$a \in \bigcup_{\beta \in \bigcup S} t_\beta$$

pois $a \in t_\alpha$, onde $\alpha \in \bigcup S$. Caso $\alpha = \bigcup S$, então α é ordinal limite, pois estamos supondo que $\bigcup S$ é ordinal limite. Com α sendo ordinal limite e t sendo contínua, $t_\alpha = \bigcup_{\gamma \in \alpha} t_\gamma$. Logo, $a \in t_\gamma$, para algum $\gamma \in \alpha$. Como $\alpha = \bigcup S$, existe $\beta \in S$ tal que $\gamma \in \beta$, acarretando que $\gamma \in \bigcup S$. Logo,

$$a \in \bigcup_{\beta \in \bigcup S} t_\beta.$$

$$\therefore \bigcup_{\alpha \in S} t_\alpha \subset \bigcup_{\beta \in \bigcup S} t_\beta.$$

Logo, no caso em que $\bigcup S$ é ordinal limite, provamos que

$$t_{\cup S} = \bigcup \{t_\alpha \mid \alpha \in S\}.$$

Analisemos, agora, o caso em que $\bigcup S$ é um sucessor, ou seja,

$$\bigcup S = \delta' = \delta \cup \{\delta\}$$

para algum ordinal δ. Assim,

$$t_{\cup S} = t_{\delta'}$$

e queremos provar então que

$$t_{\delta'} = \bigcup \{t_\alpha \mid \alpha \in S\}.$$

Como $\bigcup S = \delta' = \delta \cup \{\delta\}$, segue que $\delta \in \alpha$ para algum $\alpha \in S$. Logo, $\delta' = \alpha$ ou $\delta' \in \alpha$. Caso $\delta' = \alpha$, $t_{\delta'} = t_\alpha \subseteq \bigcup\{t_\alpha \mid \alpha \in S\}$. Caso $\delta' \in \alpha$, como t é monótona, $t_{\delta'} \in t_\alpha$, implicando que $t_{\delta'} \subset t_\alpha \subseteq \bigcup\{t_\alpha \mid \alpha \in S\}$. De qualquer modo,

$$t_{\delta'} \subseteq \bigcup\{t_\alpha \mid \alpha \in S\}.$$

Para a outra inclusão, $\alpha \in S$ qualquer. Temos

$$\alpha \subseteq \bigcup S = \delta \cup \{\delta\}$$

donde

$$\alpha \subseteq \delta \quad \text{ou} \quad \delta \in \alpha.$$

Se $\alpha \subseteq \delta$, então $\alpha = \delta$ ou $\alpha \in \delta$ e, por sua vez, tanto $\alpha = \delta$ quanto $\alpha \in \delta$ implicam que $t_\alpha \in t_{\delta'}$, donde $t_\alpha \subset t_{\delta'}$. Provando assim que

$$t_\alpha \subset t_{\delta'}, \quad \forall\ \alpha \in S.$$

Portanto,

$$\bigcup\{t_\alpha \mid \alpha \in S\} \subseteq t_{\delta'}.$$

Mostramos, assim, que

$$t_{\delta'} = \bigcup\{t_\alpha \mid \alpha \in S\}.$$

□

....

Exercícios:

1. Dados ordinais α e β, usaremos a notação $\alpha \leq \beta$ para significar que $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$. Demonstre que:

   (a) Se t é normal então $\alpha \leq t_\alpha$, para todo α. (Dica: Por indução em α.)

   (b) Se t é normal, então existem pontos fixos de t arbitrariamente grandes, ou seja, $(\forall\ \beta)(\exists\ \alpha)$ tal que $\beta \leq \alpha$ e $t_\alpha = \alpha$. (Dica: dado um ordinal β, defina indutivamente a sequência enumerável de ordinais: $\alpha_0 = \beta$, $\alpha_1 = t_\beta = t_{\alpha_0}$, ... , $\alpha_{n+1} = t_{\alpha_n}$, ...). Seja $\alpha = \bigcup_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ e mostre que $t_\alpha = \alpha$.)

. . . .

Considere S_α a relação funcional dada por $S_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$. Então:

$$\begin{aligned} S_\alpha(0) &= \alpha = \alpha + 0 \\ S_\alpha(\beta') &= \alpha + \beta' = (\alpha+\beta)' = S_\alpha(\beta)' \\ S_\alpha(\lambda) &= \alpha + \lambda = \bigcup_{\beta\in\lambda}(\alpha+\beta) = \bigcup_{\beta\in\lambda} S_\alpha(\beta), \text{ se } \lambda \text{ é ordinal limite.} \end{aligned}$$

Assim definida, S_α é normal $\forall\ \alpha$:

continuidade: direto da definição.

monoticidade: $S_\alpha(\beta+1) \overset{\text{def.}}{:=} S_\alpha(\beta)+1$ e, claramente, $S_\alpha(\beta) \in S_\alpha(\beta)+1$.

Segue que S_α é monótona.

Corolário 9. *Sejam α, β e γ ordinais quaisquer.*

a) $\beta \in \gamma \Longrightarrow \alpha+\beta \in \alpha+\gamma$ (pois S_α é monótona).

b) $\alpha+\beta = \alpha+\gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$.

Demonstração. b) Se $\beta \neq \gamma$ então $\beta \in \gamma$ ou $\gamma \in \beta$. Caso $\beta \in \gamma$, como S_α é monótona, $\alpha+\beta \in \alpha+\gamma$ (contradição!). Analogamente, se $\gamma \in \beta$ então $\alpha+\gamma \in \alpha+\beta$ (contradição!).

Portanto, $\alpha+\beta = \alpha+\gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$. □

Observação 10. *Note que $\beta+\alpha = \gamma+\alpha \not\Longrightarrow \beta = \gamma$. Por exemplo, $1+\omega = 2+\omega = \omega$, mas $1 \neq 2$.*

. . . .

Considere M_α a relação funcional dada por $M_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$. Então:

$$\begin{aligned} M_\alpha(0) &= 0 = \alpha \cdot 0 \\ M_\alpha(\beta') &= \alpha\cdot\beta' = (\alpha\cdot\beta)+\alpha = M_\alpha(\beta)+\alpha \\ M_\alpha(\lambda) &= \alpha\cdot\lambda = \bigcup_{\beta\in\lambda}(\alpha\cdot\beta) = \bigcup_{\beta\in\lambda} M_\alpha(\beta), \text{ se } \lambda \text{ é ordinal limite.} \end{aligned}$$

Assim definida, M_α é normal $\forall\ \alpha \geq 1$:

<u>continuidade:</u> direto da definição.

<u>monoticidade:</u> $M_\alpha(\beta+1) \overset{\text{def.}}{:=} M_\alpha(\beta)+\alpha$ e, claramente, $M_\alpha(\beta) \in M_\alpha(\beta)+\alpha$ para $\alpha \geq 1$.

Segue que M_α é monótona, se $\alpha \geq 1$.

Corolário 10. *Sejam α, β e γ ordinais, $\alpha \geq 1$.*

a) $\beta \in \gamma \Longrightarrow \alpha \cdot \beta \in \alpha \cdot \gamma$ (pois M_α é monótona).

b) $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$.

Demonstração. b) Se $\beta \neq \gamma$ então $\beta \in \gamma$ ou $\gamma \in \beta$. Caso $\beta \in \gamma$, como M_α é monótona ($\alpha \neq 1$), $\alpha \cdot \beta \in \alpha \cdot \gamma$ (contradição!). Analogamente, se $\gamma \in \beta$ então $\alpha \cdot \gamma \in \alpha \cdot \beta$ (contradição!).

Portanto, $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$ quando $\alpha \geq 1$. □

Observação 11. *Note que $1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega$, porém $1 \neq 2$.*

. . . .

Considere E_α a relação funcional dada por $E_\alpha(\beta) = \alpha^\beta$. Então:

$$\begin{aligned}
E_\alpha(0) &= 1 = \alpha^0 \\
E_\alpha(\beta') &= \alpha^{\beta'} = (\alpha^\beta) \cdot \alpha = E_\alpha(\beta) \cdot \alpha \\
E_\alpha(\lambda) &= \alpha^\lambda = \bigcup_{\beta \in \lambda} (\alpha^\beta) = \bigcup_{\beta \in \lambda} E_\alpha(\beta), \text{ se } \lambda \text{ é ordinal limite.}
\end{aligned}$$

Assim definida, E_α é normal $\forall\ \alpha \geq 2$:

<u>continuidade:</u> direto da definição.

<u>monoticidade:</u> $E_\alpha(\beta+1) \overset{\text{def.}}{:=} E_\alpha(\beta) \cdot \alpha$ e, para $\alpha \geq 2$, $E_\alpha(\beta) \in E_\alpha(\beta) \cdot \alpha$.

Segue que E_α é monótona, se $\alpha \geq 2$.

Corolário 11. *Sejam α, β e γ ordinais, $\alpha \geq 2$.*

a) $\beta \in \gamma \Longrightarrow \alpha^\beta \in \alpha^\gamma$ *(pois* E_α *é monótona, desde que* $\alpha \geq 2$*).*

b) $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$.

Demonstração. b) Se $\beta \neq \gamma$ então $\beta \in \gamma$ ou $\gamma \in \beta$. Caso $\beta \in \gamma$, como E_α é monótona ($\alpha \neq 2$), $\alpha^\beta \in \alpha^\gamma$ (contradição!). Analogamente, se $\gamma \in \beta$ então $\alpha^\gamma \in \alpha^\beta$ (contradição!).

Portanto, $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$ quando $\alpha \geq 2$. □

Observação 12. *Note que* $2^\omega = 3^\omega = \omega$*, porém* $2 \neq 3$.

....

Exercício:

1. Prove, por indução em γ, que para $\alpha \geq 1$ e β, γ quaisquer, tem-se :

   (a) $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$.

   (b) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

....

7.6 Um pouco mais sobre o Axioma da Substituição

Se H é uma função e A é um conjunto, então $H(A)$ é um conjunto pois está contido no contra-domínio da função, que é um conjunto. Agora, considere H algo como uma "função entre classes" e não uma função no sentido usual, entre conjuntos, ou seja, H é uma **classe** de pares ordenados que satisfaz a condição que temos para funções de que

$$(x, y), (x, z) \in H \Longrightarrow y = z,$$

exceto que H não é necessariamente um conjunto. A pergunta que se coloca é a seguinte: é verdade que, ainda assim, se tomamos A um conjunto, $H(A)$ é conjunto? O Axioma da Substituição irá nos dizer que sim. Na Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel, não podemos nos referir a uma classe H; em vez disso, utilizamos uma fórmula φ que define H.

Axioma da Substituição: Para toda fórmula $\varphi(x, y)$ não contendo a letra B, o seguinte é um axioma:

$$\forall A[(\forall x \in A)\ \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2)$$
$$\Longrightarrow \exists B\ \forall y (y \in B \Longleftrightarrow (\exists x \in A)\ \varphi(x, y))].$$

Para traduzir o Axioma da Substituição em palavras, defina a classe

$$H = \{(x, y) \mid x \in A \wedge\ \varphi(x, y)\}.$$

Então, a hipótese do axioma,

$$(\forall x \in A)\ \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2),$$

nos assegura que H é uma função entre classes. E a segunda linha,

$$\exists B\ \forall y (y \in B \Longleftrightarrow (\exists x \in A)\ \varphi(x, y)),$$

nos assegura que, se colocamos

$$B = \{y \mid (\exists x \in A)\ \varphi(x, y)\} = H(A),$$

então B é um conjunto.

Um outra forma alternativa de traduzir o Axioma da Substituição em palavras é a seguinte: leia $\varphi(x, y)$ como "x nomeia y". Então, a hipótese do axioma nos diz que "cada membro de A nomeia no máximo um objeto". E a conclusão nos diz que "a coleção dos objetos nomeados é um conjunto".

O nome "substituição" reflete a ideia de substituir cada x no conjunto A pelo objeto por ele nomeado (se for o caso) de modo a obter o conjunto B.

Exemplo 22. *Se A é um conjunto, então $\{P(a) \mid a \in A\}$ é também um conjunto. Basta tomar $\varphi(x, y)$ como sendo $y = P(x)$. Isto é, cada x nomeia o seu conjunto das partes. O Axioma da Substituição nos diz que a coleção de todos os conjuntos das partes dos elementos de um conjunto A forma um conjunto.*

Exemplo 23. *Seja S um conjunto qualquer. Então, o Axioma da Substituição nos diz que*

$$\{card\ x \mid x \in S\}$$

é um conjunto. Basta tomar a fórmula $\varphi(x, y)$ como sendo $y = card\ x$.

7.7 Teorema de Hartog

Definição 31. *Dados conjuntos A e B, dizemos que B é* **dominado** *por A (e escrevemos $B \preceq A$) quando B é equinúmero a algum subconjunto de A, ou seja, quando existe um função injetora $f : B \to A$.*

Teorema 32 (Teorema de Hartog)**.** *Dado um conjunto A qualquer, existe um ordinal que não é dominado por A.*

Demonstração. Existe uma forma sistemática de construir **o menor tal ordinal** α. Todo ordinal que é dominado por A é menor do que α, ou seja, é um elemento de α. E, reciprocamente, todo ordinal menor do que α (ou seja, todo elemento de α), deve ser dominado por A, uma vez que α é o menor ordinal não dominado por A. Isso em mente, decidimos tentar o seguinte:

$$\alpha = \{\beta \mid \beta \text{ é um ordinal e } \beta \preceq A\}.$$

A parte fundamental da demonstração é garantir que α é um conjunto. Afinal de contas, o teorema que estamos tentando provar é equivalente à afirmação de que α não é a classe de todos os ordinais.

Defina

$$W = \{\langle B, <\rangle \mid B \subseteq A \text{ e } < \text{ é uma boa ordenação sobre } B\}.$$

Afirmamos que todo elemento de α é isomorfo a algum elemento de W. Assim, α é, em algum senso, não maior do que W. De fato, seja β um elemento qualquer de α. Então, existe uma bijeção entre β e algum subconjunto B de A, digamos, $f : \beta \to B$. Agora, existe uma boa ordenação $<$ de B sobre a qual a função f se torna um isomorfismo da boa ordem $\langle \beta, \in\rangle$ sobre a boa ordem $\langle B, <\rangle$:

$$x \in y \in \beta \iff f(x) < f(y).$$

Veja que W é um conjunto pois se $\langle B, < \rangle$ é um elemento de W então

$$\langle B, < \rangle \in P(A) \times P(A \times A).$$

Podemos, então, usar o Axioma da Substituição para construir o conjunto $\mathcal{E}$ dos ordinais que são isomorfos a algum elemento de W. A discussão inicial mostra que $\alpha \subseteq \mathcal{E}$ (na verdade, $\alpha = \mathcal{E}$.)

Vimos, assim, que α é um conjunto. Como α é um conjunto de ordinais, para garantir que α é ordinal, basta mostrarmos que α é transitivo:

$$\gamma \in \beta \in \alpha \Longrightarrow \gamma \subset \beta \preceq A \Longrightarrow \gamma \in \alpha.$$

Veja que α não é dominado por A pois, se o fosse, teríamos $\alpha \in \alpha$, uma contradição!

Para finalizar, mostraremos que α é o menor ordinal não dominado por A: se não o fosse, existiria um ordinal $\beta \in \alpha$ tal que β não é dominado por A, mas, por construção, de β está em α então β é dominado por A.

Portanto, α assim construído é o menor ordinal não dominado por A.

$\square$

O Teorema de Hartog não requer o Axioma da Escolha. O seguinte teorema, sim. Na verdade, eles são equivalentes.

Teorema 33 (Teorema da Boa Ordenação)**.** *Para todo conjunto A, existe uma boa ordenação para A.*

Demonstração. Utilizaremos, aqui, o axioma da escolha, forma III:

Axioma da Escolha, III. Para todo conjunto A existe uma função F (uma "função escolha" para A) tal que o domínio de F é o conjunto dos subconjuntos não vazios de A, e tal que $F(B) \in B$ para cada subconjunto não vazio $B \subseteq A$.

Dado A um conjunto qualquer, seja G uma função escolha para A, e seja α um ordinal não dominado por A (que existe via Teorema de Hartog). Nossa estratégia é ordenar A escolhendo primeiramente um menor elemento, depois o próximo menor elemento, e assim por diante. Para a parte do "e assim por diante", utilizaremos o ordinal α. Grosso modo, como α não é dominado por A, α é "grande o suficiente" de modo a conseguirmos exaurir A antes de chegarmos ao fim de α.

Seja e algum elemento que não está em A. Usaremos recursão transfinita para definirmos uma função $F : \alpha \to A \cup \{e\}$ tal que, para todo $\gamma \in \alpha$,

$$F(\gamma) = \begin{cases} G(A - \{F(t) \mid t \in \gamma\}), & \text{se } A - \{F(t) \mid t \in \gamma\} \neq \emptyset \\ e, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Em outras palavras, $F(\gamma)$ é o elemento escolhido de $A - \{F(t) \mid t \in \gamma\}$, até exaurirmos A.

Veja que se $e \notin im(F)$ então, dados $\gamma \in \beta \in \alpha$, $F(\gamma) \neq F(\beta)$, acarretando em F injetora, o que contradiz a condição de α não ser dominado por A. De fato, se $e \notin im(F)$, então $F(\gamma) \neq e$ e $F(\beta) \neq e$. Da definição de F, segue que $F(\gamma) \neq F(\beta)$ pois, nesse caso, $F(\beta)$ é um elemento de $A - \{F(t) \mid t \in \beta\}$ e $F(\gamma) \notin A - \{F(t) \mid t \in \beta\}$ uma vez que $\gamma \in \beta$.

Seja δ o menor elemento de α para o qual $F(\delta) = e$. Então,

$$A = \{F(t) \mid t \in \delta\}$$

e, pelo raciocínio anterior, $F|_\gamma : \gamma \to A$ é injetora e, consequentemente, uma bijeção. Isso induz uma boa ordem sobre A, a saber:

$$F(\beta) < F(\gamma) \text{ para } \beta \in \gamma \in \delta.$$

Assim, $F|_\gamma$ é um isomorfismo entre as boas ordenações $(\gamma, \in)$ e $(A, <)$.

□

Exemplo 24. *O Teorema da Boa Ordenação garante, por exemplo, que existe uma boa ordem para o conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais. É claro que a ordem usual sobre* $\mathbb{R}$ *não é uma boa-ordenação e, portanto, essa boa ordenação que existe para* $\mathbb{R}$ *há de ser distinta da usual. Qual seria ela? Veja que temos um teorema que garante a sua existência mas não nos dá pistas de como ela deve ser. É inteiramente possível que não haja uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos que defina explicitamente uma boa ordenação sobre* $\mathbb{R}$*.*

Corolário 12 (Teorema da Enumeração)**.** *Todo conjunto é equinúmero a algum ordinal.*

O Teorema da Enumeração produz uma definição satisfatória de número cardinal.

Definição 32. *Para um conjunto A, defina o* ***número cardinal*** *de A ($|A|$) como sendo o menor número ordinal que é equinúmero a A.*

Teorema 34. *a) Dados conjuntos A e B,*

$$|A| = |B| \Longleftrightarrow A \text{ é equinúmero a } B \ (A \approx B).$$

b) Para um conjunto finito A, $|A|$ é o único número natural equinúmero a A.

Demonstração. a) Primeiramente, veja que, pela definição, $A \approx |A|$. Logo, temos imediatamente que

$$|A| = |B| \Longrightarrow A \approx B.$$

Reciprocamente, se $A \approx B$ então todo ordinal que é equinúmero a A é também equinúmero a B, e vice-versa. Logo, $|A| = |B|$.

b) Se A é finito, por definição, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \approx n$. Esse número natural n é único pois números naturais distintos não são equinúmeros. Logo, $n = |A|$.

□

7.8 Conclusão da demonstração do Teorema 17

No Capítulo 5, enunciamos o Teorema 17, o qual afirma serem equivalentes:

1. **Axioma da Escolha, I.** Para toda relação R existe uma função $F \subseteq R$ com $dom\ F = dom\ R$.

2. **Axioma da Escolha, II.** O produto cartesiano de conjuntos não vazios é sempre não vazio. Isto é, se H é uma função com domínio I e se $(\forall\ i \in I)\ H(i) \neq \emptyset$, então existe uma função f com domínio I tal que $(\forall\ i \in I)\ f(i) \in H(i)$.

3. **Axioma da Escolha, III.** Para todo conjunto A existe uma função F (uma "função escolha" para A) tal que o domínio de F é o conjunto dos subconjuntos não vazios de A, e tal que $F(B) \in B$ para cada subconjunto não vazio $B \subseteq A$.

4. **Axioma da Escolha, IV.** Seja $\mathcal{A}$ um conjunto tal que **(a)** cada elemento de $\mathcal{A}$ é um conjunto não vazio, e **(b)** quaisquer dois elementos distintos de $\mathcal{A}$ são disjuntos. Então, existe um conjunto C contendo exatamente um elemento de cada membro de $\mathcal{A}$, ou seja, para cada $B \in \mathcal{A}$, o conjunto $C \cap B$ é um conjunto unitário $\{x\}$, algum x.

5. **Comparabilidade de cardinais.** Dados conjuntos C e D, ou $C \preceq D$, ou $D \preceq C$.

6. **Lema de Zorn.** Seja $\mathcal{A}$ um conjunto tal que para toda cadeia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, tem-se $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$. ($\mathcal{B}$ é chamado uma cadeia se, e só se, para todo C e D em $\mathcal{B}$, ou $C \subseteq D$, ou $D \subseteq C$.) Então, $\mathcal{A}$ possui um elemento M (um "elemento maximal") tal que M não é um subconjunto de qualquer outro conjunto em $\mathcal{A}$.

Pudemos, ali, demonstrar as seguintes implicações:

$$\begin{tikzcd}
 & 6 \arrow[r] \arrow[dl] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\
5 & & 3 \arrow[u] & 4 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Para fechar os ciclos, utilizaremos o Teorema da Boa Ordenação (BO). Veja que na demonstração do Teorema da Boa Ordenação, utilizamos o item (3) acima. Finalizaremos provando que (BO) $\Longrightarrow$ (6) e (5) $\Longrightarrow$ (BO), de modo a fecharmos as equivalências todas com

$$\begin{tikzcd}
 & 6 \arrow[r] \arrow[dl] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\
5 \arrow[dr] & & 3 \arrow[u] \arrow[dl] & 4 \arrow[l] \\
 & BO \arrow[uu] & &
\end{tikzcd}$$

Demonstração de (5) $\Longrightarrow BO$**:** Seja A um conjunto qualquer. Pelo Teorema de Hartog, existe um ordinal α que não é dominado por A. Assumindo (5), então $A \preceq \alpha$, ou seja, existe uma função injetora $f : A \to \alpha$. Agora, basta usarmos a f e a boa ordenação de α para bem ordenarmos A, definindo:

$$x, y \in A,\ x < y \Longleftrightarrow f(x) \in f(y).$$

Demonstração de $BO \Longrightarrow$ (6)**:** Seja $\mathcal{A}$ um conjunto tal que para toda cadeia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, tem-se $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$. (lembrando que $\mathcal{B}$ é chamado uma cadeia se, e só se, para todo C e D em $\mathcal{B}$, ou $C \subseteq D$, ou $D \subseteq C$.)

Pelo Teorema da Boa Ordem, existe uma boa ordem $<$ sobre $\mathcal{A}$. Queremos encontrar uma cadeia $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ suficientemente grande de modo que $\bigcup \mathcal{C}$ seja um elemento maximal de $\mathcal{A}$. Usaremos indução transfinita para a construção de $\mathcal{C}$. O processo de indução transfinita nos dá uma função

$$F : \mathcal{A} \to 2$$

tal que, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$F(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ inclui todo } B < A \text{ para o qual } F(B) = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Observação 13. *A inclui todo $B < A$ para o qual $F(B) = 1$ significa que*

$$B < A \text{ e } F(B) = 1 \Longrightarrow B \subset A.$$

Seja $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} \mid F(A) = 1\}$. Assim definido, F é exatamente a função característica de $\mathcal{C}$ e, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$A \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow (B < A \text{ e } B \in \mathcal{C} \Longrightarrow B \subset A).$$

Afirmamos que $\bigcup \mathcal{C}$ é um elemento maximal de $\mathcal{A}$.

Primeiro de tudo, $\mathcal{C}$ é uma cadeia: sejam $A, B \in \mathcal{C}$ quaisquer. Como $\mathcal{A}$ é bem ordenado, $A \leq B$ ou $B \leq A$. Caso, $A \leq B$, como $A, B \in \mathcal{C}$, temos que $A \subset B$. Analogamente, Caso, $B \leq A$, como $A, B \in \mathcal{C}$, temos que $B \subset A$. Logo, $\mathcal{C}$ é uma cadeia.

Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, temos que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

Mostremos que $\bigcup \mathcal{C}$ é um elemento maximal de $\mathcal{A}$: suponha $\bigcup \mathcal{C} \subseteq D \in \mathcal{A}$. Como D contém todos os elementos de $\mathcal{C}$, temos que $D \in \mathcal{C}$, ou seja, $F(D) = 1$. De fato, se

$$B < D \ \text{ e } \ F(B) = 1$$

então $B \in \mathcal{C}$ e, portanto,

$$B \subset \bigcup \mathcal{C} \subset D,$$

o que é exatamente a condição para $F(D) = 1$. Logo, $D \subset \bigcup \mathcal{C}$, seguindo que $D = \bigcup \mathcal{C}$. Portanto, $\bigcup \mathcal{C}$ é um elemento maximal de $\mathcal{A}$.

7.9 Mais sobre a aritmética dos ordinais

Lema 3. *Seja t uma relação funcional normal. Então, para todo $\beta \geq t_0$,*

$$\{\alpha \mid t_\alpha \leq \beta\}$$

tem um máximo.

Demonstração. Seja $\beta \geq t_0$ qualquer e denotemos

$$\Delta = \{\alpha \mid t_\alpha \leq \beta\}.$$

Podemos usar o Axioma da Substituição para garantir que Δ é conjunto. Considere a fórmula $\varphi(x, y)$ como sendo $t_y = x$. Como t é monótona, tem-se

$$\forall\ x \in \beta + 1,\ \varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \Longrightarrow t_{y_1} = t_{y_2} = x \overset{t \text{ é monótona}}{\Longrightarrow} y_1 = y_2.$$

Logo, pelo Axioma da Substituição, existe o conjunto

$$\{y \mid (\exists\ x \in \beta + 1)\ \varphi(x, y)\} = \{y \mid t_y \in \beta + 1\} = \{y \mid t_y \leq \beta\}.$$

Agora, mostremos que Δ, o qual é conjunto, é transitivo.

<u>Δ é transitivo:</u> Sejam $\alpha \in \gamma \in \Delta$. Então, $t_\gamma \leq \beta$. Como t é monótona, $t_\alpha \in t_\gamma$, seguindo que $t_\alpha \in \beta$. Portanto, $\alpha \in \Delta$.

Como Δ é um conjunto de ordinais e Δ é transitivo, segue que Δ é um ordinal.

Além disso, $\Delta \neq 0$ uma vez que $\beta \geq t_0$ e, portanto, $0 \in \Delta$.

Provaremos, agora, que Δ é um ordinal sucessor. Suponhamos, por absurdo, que Δ é ordinal limite. Então, como t é contínua,

$$t_\Delta = \bigcup_{\alpha \in \Delta} t_\alpha.$$

Como, para cada $\alpha \in \Delta$, $t_\alpha \leq \beta$, segue que $t_\Delta \leq \beta$ e, assim, $\Delta \in \Delta$, uma contradição!

Portanto, Δ é um ordinal sucessor, digamos, $\Delta = \gamma + 1$, acarretando que γ é o elemento máximo de Δ.

□

Teorema 35 (Teorema da Subtração)**.** *Sejam α, β ordinais tais que $\alpha \leq \beta$. Então, existe um único ordinal δ tal que*

$$\alpha + \delta = \beta.$$

Demonstração. Existência: Fixado α, considere a relação funcional $t_\gamma = \alpha + \gamma = S_\alpha(\gamma)$, a qual já provamos ser normal. Veja que $t_0 = \alpha + 0 = \alpha$. Assim, dado $\beta \geq \alpha$, temos $\beta \geq t_0$. Pelo Lema 3,

$$\Delta = \{\gamma \mid \alpha + \gamma \leq \beta\}$$

possui um máximo, digamos, δ. Provemos que

$$\alpha + \delta = \beta.$$

Se $\alpha + \delta \neq \beta$ então $\alpha + \delta < \beta$ e, portanto, $(\alpha + \delta) + 1 \leq \beta$. Como, por definição,

$$\alpha + (\delta + 1) = (\alpha + \delta) + 1,$$

segue que $\delta + 1 \in \Delta$, contradizendo que δ é o elemento máximo de Δ.

Portanto, $\alpha + \delta = \beta$.

Unicidade: $\beta = \alpha + \delta_1 = \alpha + \delta_2 \overset{\text{Corolário 9}}{\Longrightarrow} \delta_1 = \delta_2$.

□

Observação 14. *Nas condições do Teorema 35, pode-se mostrar que δ é o ordinal isomorfo ao conjunto bem-ordenado*

$$\{\gamma \mid \gamma \in \beta - \alpha\}$$

ordenado pela relação de pertence.

Lembre-se que todo conjunto bem ordenado é isomorfo (bijeção que preserva ordem) a um único ordinal, chamado **o seu tipo de ordem**.

Teorema 36 (Teorema da Divisão). *Sejam α, δ ordinais, $\delta \neq 0$. Então existe um único par de ordinais β, γ tal que*

$$\alpha = \delta \cdot \beta + \gamma, \ \ e \ \gamma \in \delta.$$

Demonstração. Se $\alpha < \delta$, $\alpha = \delta \cdot 0 + \alpha$, com $\alpha \in \delta$. Se $\alpha \geq \delta$, prosseguimos do seguinte modo:

Existência: Considere a relação funcional $M_\delta(\rho) = \delta \cdot \rho$, a qual já sabemos ser normal. Veja que $M_\delta(0) = \delta \cdot 0 = 0 \leq \alpha$. Logo, pelo Lema 3,

$$\{\rho \mid M_\delta(\rho) \leq \alpha\}$$

possui um máximo. Seja β o máximo.

Assim, $\delta \cdot \beta \leq \alpha$. Pelo Teorema 35, existe um único ordinal γ tal que

$$\delta \cdot \beta + \gamma = \alpha.$$

Mostremos que $\gamma \in \delta$. Se tivéssemos $\gamma \geq \delta$, pelo Teorema 35,

$$\gamma = \delta + \rho,$$

para algum ordinal ρ. Segue que

$$\begin{aligned} \alpha = \delta \cdot \beta + \gamma &= \delta \cdot \beta + (\delta + \rho) \\ &= (\delta \cdot \beta + \delta) + \rho \\ &= \delta \cdot (\beta + 1) + \rho \end{aligned}$$

donde $\delta \cdot (\beta + 1) \leq \alpha$, contradizendo que β é elemento máximo com essa propriedade. Portanto, $\gamma \in \delta$.

Unicidade: Suponha $\alpha = \delta \cdot \beta_1 + \gamma_1 = \delta \cdot \beta_2 + \gamma_2$, com $\gamma_1, \gamma_2 \in \delta$. Se $\beta_1 \neq \beta_2$, sem perda de generalidade, suponhamos $\beta_1 < \beta_2$. Assim, $\beta_1 + 1 \leq \beta_2$, seguindo que

$$\alpha = \delta \cdot \beta_1 + \gamma_1 \overset{\gamma_1 \in \delta}{<} \delta \cdot \beta_1 + \delta = \delta \cdot (\beta_1 + 1) \leq \delta \cdot \beta_2 \leq \delta \cdot \beta_2 + \gamma_2 = \alpha,$$

donde $\alpha < \alpha$, uma contradição! Logo, $\beta_1 = \beta_2$.

Segue que

$$\delta \cdot \beta_1 + \gamma_1 = \delta \cdot \beta_1 + \gamma_2,$$

donde $\gamma_1 = \gamma_2$.

$\square$

Teorema 37 (Teorema do Logaritmo)**.** *Sejam $\alpha \neq 0$ e $\beta > 1$ ordinais. Então, existem γ, δ e ρ únicos tal que*

$$\alpha = \beta^\gamma \cdot \delta + \rho,$$

onde $0 \neq \delta \in \beta$ e $\rho \in \beta^\gamma$.

Demonstração. Existência: Considere a relação funcional $E_\beta(\gamma) = \beta^\gamma$. Vimos que E_β é normal para $\beta > 1$.

Temos $E_\beta(0) = \beta^0 = 1 \leq \alpha$. Logo,

$$\{\gamma \mid \beta^\gamma \leq \alpha\}$$

possui um elemento máximo γ. Como $\beta^\gamma \neq 0$ (pois $\beta > 1$), pelo Teorema 36, existem únicos δ e ρ, com $\rho \in \beta^\gamma$, tal que

$$\alpha = \beta^\gamma \cdot \delta + \rho.$$

Resta mostrar que $\delta \neq 0$ e que $\delta \in \beta$. Caso $\delta = 0$, teríamos $\alpha = \rho$, com $\rho \in \beta^\gamma \leq \alpha$, donde teríamos $\alpha \in \alpha$, uma contradição! Portanto, $\delta \neq 0$. Para provar que $\delta \in \beta$, suponha o contrário, ou seja, que $\beta \leq \delta$. Então, $\beta^{\gamma+1} = \beta^\gamma \cdot \beta \leq \beta^\gamma \cdot \delta \leq \beta^\gamma \cdot \delta + \rho = \alpha$, contradizendo que γ é maximal com respeito à $\beta^\gamma \leq \alpha$. Portanto, $\delta \in \beta$.

Unicidade: Para provar a unicidade, considere qualquer representação $\alpha = \beta^\gamma \cdot \delta + \rho$, onde $0 \neq \delta \in \beta$ e $\rho \in \beta^\gamma$. Primeiro, afirmamos que γ deve ser exatamente o ordinal que encontramos no passo acima, ou seja, γ é o elemento máximo de

$$\{\gamma \mid \beta^\gamma \leq \alpha\}.$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned}
\beta^\gamma &\leq \alpha = \beta^\gamma \cdot \delta + \rho \quad (\text{pois } \delta \neq 0) \\
&< \beta^\gamma \cdot \delta + \beta^\gamma \quad (\text{pois } \rho \in \beta^\gamma) \\
&= \beta^\gamma \cdot (\delta + 1) \\
&\leq \beta^\gamma \cdot \beta \quad (\text{pois } \delta \in \beta) \\
&= \beta^{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

Assim, $\beta^\gamma \leq \alpha \in \beta^{\gamma+1}$. Essas desigualdades determinam γ unicamente: ele deve ser o maior ordinal para o qual $\beta^\gamma \leq \alpha$.

Uma vez que γ é unicamente determinado, o Teorema da Divisão nos garante a unicidade de δ e de ρ. $\square$

Corolário 13 (Forma normal de Cantor). *Para todo ordinal α, existem números naturais $n_1, \dots, n_k$ e ordinais $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ ($k \in \omega$) tal que*

$$\gamma_k \in \gamma_{k-1} \in \cdots \in \gamma_1$$

e

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k.$$

Ademais, essa representação é única.

Demonstração. Se $\alpha \in \omega$, então $\alpha = n_1 \in \omega$ e, assim, escrevemos

$$\alpha = \omega^0 \cdot n_1.$$

Suponha $\alpha \geq \omega$. Então $\alpha \neq 0$. Assim, podemos aplicar o Teorema 37: existem únicos $\gamma_1, \delta_1, \rho_1$ tal que

$$\alpha = \omega^{\gamma_1}\delta_1 + \rho_1,\ 0 \neq \delta_1 \in \omega \text{ e } \rho_1 \in \omega^{\gamma_1}.$$

Como $\delta_1 \in \omega$, digamos $\delta_1 = n_1 \in \omega$. Escrevemos então

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \rho_1.$$

Se $\rho_1 \in \omega$, então $\rho_1 = n_2 \in \omega$ e escrevemos

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^0 \cdot n_2.$$

Se $\rho_1 \geq \omega$, pelos mesmos argumentos acima,

$$\rho_1 = \omega^{\gamma_2} \cdot \delta_2 + \rho_2,\ \delta_2 \neq 0 \text{ e } \rho_2 \in \omega^{\gamma_2}$$

e, então,

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot n_2 + \rho_2.$$

Temos que mostrar que $\gamma_2 \in \gamma_1$: temos $\rho_2 \in \omega^{\gamma_2} \in \rho_1 \in \omega^{\gamma_1}$, donde $\omega^{\gamma_2} \in \omega^{\gamma_1}$ o que, por sua vez, implica em $\gamma_2 \in \gamma_1$.

Continuando dessa maneira, obtemos uma cadeia descendente de ordinais $\rho_1, \rho_2, \ldots$, a qual não pode ser infinita (podemos provar por indução transfinita em α), ou seja, $\rho_k = 0$ para algum k (finito). Desse modo, α fica representado por

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots \omega^{\gamma_k} \cdot n_k,$$

onde $n_1, \ldots, n_k$ são números naturais não nulos e $\gamma_k \in \gamma_{k-1} \in \cdots \in \gamma_1$.

$\square$

7.10 Alephs

Seja A uma classe qualquer de ordinais. A pode ser ou não um conjunto. Se A for limitada, ou seja se existir um ordinal β tal que $\alpha \leq \beta$ para todo $\alpha \in A$, então $A \subset \beta+1$ e, consequentemente, A é um conjunto. Reciprocamente, se A for ilimitado então $\bigcup A$ é a classe de todos os ordinais: dado β um ordinal qualquer, como A é ilimitado, existe $\alpha \in A$ tal que $\beta \in \alpha$ e, assim, $\beta \in \bigcup A$. Pelo Teorema de Burali-Forti, não tem como A ser conjunto. Concluímos, assim, que uma classe A de ordinais é um conjunto se, e somente se, A é limitada.

Vamos nos concentrar agora na seguinte classe de ordinais, a qual é ilimitada: a classe dos números cardinais infinitos. O Teorema de Hartog nos garante que essa classe é ilimitada: se β é um ordinal qualquer, existe α o menor ordinal que não é dominado por β. O ordinal α é o menor cardinal maior do que o ordinal β.

A classe dos cardinais infinitos, como qualquer outra classe de ordinais, herda a boa ordem dos ordinais dada pela relação de pertence. Gostaríamos de "enumerar" seus elementos em ordem ascendente. Existe o menor cardinal infinito, o qual é sempre denotado por $\aleph_0$. E existe o próximo (o menor cardinal infinito maior do que $\aleph_0$), o qual denotamos por $\aleph_1$. E assim por diante.

Vamos agora dar significado para esse "e assim por diante".

Suponha que temos definido os cardinais $\aleph_\beta$ para todo $\beta \in \alpha$. Naturalmente, definimos

$$\aleph_\alpha = \text{o menor cardinal infinito diferente de } \aleph_\beta \text{ para todo } \beta \in \alpha.$$

Tal cardinal existe pois $\{\aleph_\beta \mid \beta \in \alpha\}$ é um conjunto (usa o Axioma da Substituição).

Teorema 38. *a) Se $\alpha \in \beta$ então $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.*

b) Todo cardinal infinito é da forma $\aleph_\alpha$ para algum α.

Demonstração. a) Pela definição de $\aleph_\alpha$ e $\aleph_\beta$, tanto $\aleph_\alpha$ quanto $\aleph_\beta$ são ordinais não dominados por $\aleph_\gamma$, para todo $\gamma \in \alpha$. Como $\aleph_\alpha$ é o menor tal ordinal, $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta$. Agora, da definição de $\aleph_\beta$, como $\alpha \in \beta$, $\aleph_\beta$ não é dominado por $\aleph_\alpha$. Portanto, $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

b) Usaremos indução transfinita sobre a classe dos cardinais infinitos (que é uma sub-classe da classe dos ordinais). Suponha, como hipótese indutiva, que κ é um cardinal infinito para o qual todo cardinal infinito menor do que κ está na imagem dessa "operação aleph", ou seja, é do tipo $\aleph_\beta$. Considere o conjunto de ordinais correspondente,

$$\{\beta \mid \aleph_\beta < \kappa\}.$$

Esse é de fato um conjunto (Axioma da Substituição). Mostremos que esse conjunto é transitivo: sejam β, γ ordinais tais que $\gamma \in \beta$ e $\aleph_\beta < \kappa$. Pelo item a), $\aleph_\gamma < \aleph_\beta$. Segue que $\aleph_\gamma < \kappa$. Segue então que

$$\{\beta \mid \aleph_\beta < \kappa\}$$

é um ordinal, digamos α. Por definição, $\aleph_\alpha$ é o menor cardinal infinito diferente de $\aleph_\beta$, para todo $\beta \in \alpha$, ou seja, para todo β tal que $\aleph_\beta < \kappa$. Pela hipótese de indução, $\aleph_\alpha$ é o menor cardinal infinito que é diferente de todo cardinal infinito menor do que κ, ou seja, $\aleph_\alpha = \kappa$.

$\square$

Observação 15. ***Hipótese do contínuo:*** $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = c$.

Hipótese do contínuo generalizada: $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Essas hipóteses são indecidíveis em ZFC.

Referências Bibliográficas

[1] Paul J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Dover edition, 2008.

[2] Herbert B. Enderton, *Elements of set theory*, Academic Press, 1977.

[3] Paul H. Halmos, *Teoria ingênua dos conjuntos*, Editora da Universidade de São Paulo, 1970.